УДК 681.5.011

$\mathcal{H}_\infty$ АНАЛИЗ ПОЛИТОПИЧЕСКИХ ДИСКРЕТНЫХ ДЕСКРИПТОРНЫХ СИСТЕМ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ЛИНЕЙНЫХ МАТРИЧНЫХ НЕРАВЕНСТВ

А.А. Белов

Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН

Россия, 117997, Москва, Профсоюзная ул., 65

E-mail: a.a.belov@inbox.ru

О.Г. Андрианова

Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН

Россия, 117997, Москва, Профсоюзная ул., 65

E-mail: andrianovaog@gmail.com

Н.Н Унанян

Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН

Россия, 117997, Москва, Профсоюзная ул., 65

E-mail: n.n.unanyan@mail.ru

Ключевые слова: ЛМН, $\mathcal{H}_\infty$-норма, политопические системы, дескрипторные системы, робастность.

Аннотация: При решении задач подавления внешних возмущений одним из главных критериев качества подавления выступает $\mathcal{H}_\infty$-норма системы. Объектом исследования в данной работе являются политопические дескрипторные системы дискретного времени с неопределенностями в правой части системы. Для данного класса систем получены непараметрические вычислительно эффективные условия, позволяющие проверить робастную допустимость системы и оценить ее $\mathcal{H}_\infty$-норму.

1. Введение

Дескрипторные системы, которые определяются как системы, записанные в физических переменных, нашли свое применение в различных областях науки и техники, например, в моделировании химических и биологических процессов, в робототехнике, электротехнике и механических системах [1]. В силу того, что в дескрипторных системах переменные имеют физический смысл, в математических моделях наряду с дифференциальными зачастую присутствуют и алгебраические уравнения. Наличие алгебраических уравнений может приводить к появлению у системы нежелательных свойств, которыми не обладают обыкновенные системы. Такие свойства требуют разработки дополнительных методов и алгоритмов анализа и синтеза систем управления.

К одним из таких задач анализа относится получение методов оценки свойств робастности и качества подавления влияния внешних возмущений. Наиболее популярным методом анализа является оценка индуцированной нормы системы на множестве возмущающих сигналов. К таким нормам можно отнести хорошо известные $\mathcal{H}_2$ и $\mathcal{H}_\infty$ нормы. В современной научной литературе были решены задачи робастного анализа дескрипторных систем с неопределенностями [2–6]. Однако в настоящее время известно лишь несколько результатов, позволяющих решить задачу $\mathcal{H}_\infty$ анализа для политопических дескрипторных систем [2, 3]. Политопические системы – это линейные стационарные системы, параметры которых лежат на известном политопе. Существующие результаты по $\mathcal{H}_\infty$ анализу для такого класса систем обладают рядом недостатков, которые не позволяют на их основе разработать численные алгоритмы анализа и синтеза с высокой точностью и низкой вычислительной сложностью. Таким образом, задача разработки новых вычислительно эффективных методов $\mathcal{H}_\infty$ анализа политопических дискретных дескрипторных систем является актуальной задачей.

Настоящая работа посвящена решению задачи $\mathcal{H}_\infty$ анализа политопических дискретных дескрипторных систем с помощью аппарата линейных матричных неравенств. В работе были получены непараметрические выпуклые условия, которые легко алгоритмизуются и позволяют одновременно проверить робастную допустимость системы и оценить величину ее $\mathcal{H}_\infty$-нормы.

2. Постановка задачи

Будем рассматривать политопические дескрипторные системы, заданные в следующей форме:

$$Ex(k+1) = \widetilde{A}(\Theta)x(k) + \widetilde{B}(\Theta)w(k), \tag{1}$$

$$y(k) = \widetilde{C}(\Theta)x(k) + \widetilde{D}(\Theta)w(k), \tag{2}$$

где $x(k) \in \mathbb{R}^n$ – вектор состояния системы, $w(k) \in \mathbb{R}^m$ – квадратично суммируемая последовательность, $y(k) \in \mathbb{R}^p$ – выход системы.

Матрицы $\widetilde{A}$, $\widetilde{B}$, $\widetilde{C}$, $\widetilde{D}$ зависят от вектора неопределенных параметров Θ в виде

$$\kappa(\Theta) = \sum_{i=1}^{s} \theta_i \kappa_i, \quad \kappa_i = \{\widetilde{A}_i, \widetilde{B}_i, \widetilde{C}_i, \widetilde{D}_i\}, \tag{3}$$

где θ_i удовлетворяют следующим ограничениям:

$$\Theta: \ \sum_{i=1}^{s} \theta_i = 1, \quad \theta_i \geqslant 0, \quad \theta_i \in \mathbb{R}, \quad \forall i = \overline{1,s}. \tag{4}$$

Матрица E является вырожденной, т.е. $\operatorname{rank}(E) = r < n$.

Передаточная функция системы (1)–(2) будет определяться следующим образом: $P_\Theta(z) = \widetilde{C}(\Theta)(zE - \widetilde{A}(\Theta))^{-1}\widetilde{B}(\Theta) + \widetilde{D}(\Theta)$.

Дискретные дескрипторные системы отличаются от обыкновенных систем наличием некоторых свойств, а именно, регулярности, причинности и допустимости. Рассмотрим определения этих свойств подробнее для фиксированного значения вектора Θ.

Определение 1. *Пара матриц* $(E, \widetilde{A}(\Theta))$ *называется регулярной, если существует такой скаляр* $\lambda \in \mathbb{C}$, *для которого* $\det(\lambda E + \widetilde{A}(\Theta)) \neq 0$.

Определение 2. *Система* (1)–(2) *называется причинной, если ее состояние* $x(k)$, *зависит только от начальных условий* $x(0)$ *и значений* $w(0), w(1), ..., w(k)$ *внешнего сигнала.*

Определение 3. *Система* (1)–(2) *называется устойчивой, если при* $w(k) = 0$ *и любых согласованных начальных условиях* $x(0)$ *справедливо неравенство*

$$\|x(k)\| \leqslant \alpha\beta^k \|x(0)\|,\ k \in \mathbb{Z},\ k \geqslant 0\ \alpha > 0,\ 0 < \beta < 1.$$

Определение 4. *Система* (1)–(2) *называется допустимой, если она является регулярной, причинной и устойчивой.*

В случае, если система является допустимой для любых значений Θ из заданного множества, то система будет называться робастно допустимой.

Наконец, рассмотрим выражение для $\mathcal{H}_\infty$-нормы политопической дескрипторной системы:

$$\|P_\Theta\|_\infty = \sup_\Theta \sup_W \frac{\|Y\|_2}{\|W\|_2}.$$

Для того чтобы $\mathcal{H}_\infty$-норма дескрипторной системы была конечной, достаточно, чтобы система была робастно устойчивой. Однако при синтезе физически реализуемого управлении для дескрипторных системам важно также соблюдение свойства причинности, поэтому возникает задача проверки робастной допустимости системы и оценки ее $\mathcal{H}_\infty$-нормы. Она формулируется следующим образом: для регулярной системы (1)–(2) и заданного скалярного параметра $\gamma > 0$ требуется установить факт робастной допустимости системы и выполнения неравенства

$$\|P_\Theta\|_\infty < \gamma$$

для всех Θ, удовлетворяющих (4).

3. Основной результат

Для того, чтобы сформулировать основной результат, рассмотрим некоторые предварительные преобразования. Предположение о регулярности системы необходимо для существования и единственности ее решения при заданных согласованных начальных условиях и некотором фиксированном входном сигнале. Если система регулярна, то справедливы следующие эквивалентные преобразования:

$$A(\Theta) = \widetilde{W}\widetilde{A}(\Theta)\widetilde{V} = \sum_{i=1}^{s} \theta_i A_i,\ B(\Theta) = \widetilde{W}\widetilde{B}(\Theta) = \sum_{i=1}^{s} \theta_i B_i, \tag{5}$$

$$C(\Theta) = \widetilde{C}(\Theta)\widetilde{V} = \sum_{i=1}^{s} \theta_i C_i,\ D(\Theta) = \widetilde{D}(\Theta) = \sum_{i=1}^{s} \theta_i D_i, \tag{6}$$

где две невырожденные матрицы $\widetilde{W}$ и $\widetilde{V}$ определяются из соотношения $\widetilde{W}E\widetilde{V} = \mathrm{diag}(I_r, 0)$.

Теорема 1. *Для заданного скаляра* $\gamma > 0$ *система* (1)–(2) *является робастно допустимой и ее* $\mathcal{H}_\infty$ *–норма ограничена числом* γ *(* $\|P_\Theta\|_\infty < \gamma$*) для всех* θ_i, *удовлетворяющих* (4)*, если найдутся такие матрицы* $L_i \in \mathbb{R}^{r\times r}$, $L_i > 0$, $Q_i \in \mathbb{R}^{r\times r}$, $R_i \in \mathbb{R}^{r\times(n-r)}$, $S_i \in \mathbb{R}^{(n-r)\times(n-r)}$, *что выполнены следующие линейные матричные неравенства:*

$$
\begin{bmatrix} -\frac{1}{2}Q_i - \frac{1}{2}Q_i^{\mathrm{T}} & \Gamma_i A_i & \Gamma_i B_i & L_i^{\mathrm{T}} - Q_i^{\mathrm{T}} - \frac{1}{2}Q_i & 0 \\ * & \Pi_i A_i + A_i^{\mathrm{T}}\Pi_i^{\mathrm{T}} - \Sigma_i & \Pi_i B_i & A_i^{\mathrm{T}}\Gamma_i^{\mathrm{T}} & C_i^{\mathrm{T}} \\ * & * & -\gamma^2 I_m & B_i^{\mathrm{T}}\Gamma_i^{\mathrm{T}} & D_i^{\mathrm{T}} \\ * & * & * & -Q_i - Q_i^{\mathrm{T}} & 0 \\ * & * & * & * & -I_p \end{bmatrix} < 0, \tag{7}
$$

$$
\begin{bmatrix} -\frac{1}{2}Q_i - \frac{1}{2}Q_i^{\mathrm{T}} & \Gamma_i A_j & \Gamma_i B_j & L_i\mathrm{T} - Q_i^{\mathrm{T}} - \frac{1}{2}Q_i & 0 \\ * & \Pi_i A_j + A_j^{\mathrm{T}}\Pi_i^{\mathrm{T}} - \Sigma_i & \Pi_i B_j & A_j^{\mathrm{T}}\Gamma_i^{\mathrm{T}} & C_j^{\mathrm{T}} \\ * & * & -\gamma^2 I_m & B_j^{\mathrm{T}}\Gamma_i^{\mathrm{T}} & D_j^{\mathrm{T}} \\ * & * & * & -Q_i - Q_i^{\mathrm{T}} & 0 \\ * & * & * & * & -I_p \end{bmatrix} + \tag{8}
$$

$$
+ \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}Q_j - \frac{1}{2}Q_j^{\mathrm{T}} & \Gamma_j A_i & \Gamma_j B_i & L_j^{\mathrm{T}} - Q_j^{\mathrm{T}} - \frac{1}{2}Q_j & 0 \\ * & \Pi_j A_i + A_i^{\mathrm{T}}\Pi_j^{\mathrm{T}} - \Sigma_j & \Pi_j B_i & A_i^{\mathrm{T}}\Gamma_j^{\mathrm{T}} & C_i^{\mathrm{T}} \\ * & * & -\gamma^2 I_m & B_i^{\mathrm{T}}\Gamma_j^{\mathrm{T}} & D_i^{\mathrm{T}} \\ * & * & * & -Q_j - Q_j^{\mathrm{T}} & 0 \\ * & * & * & * & -I_p \end{bmatrix} < 0
$$

для $i = \overline{1,s}$ $i < j$, $\Sigma_i = \begin{bmatrix} L_i & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\Pi_i = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & S_i \end{bmatrix}$, $\Gamma_i = \begin{bmatrix} Q_i & R_i \end{bmatrix}$.

Доказательство. Отметим, что $\kappa(\Theta)$ может быть представлена в виде $\kappa(\Theta) = \sum_{i=1}^{s} \theta_i \kappa_i = \sum_{i=1}^{s} \theta_i \left(\sum_{j=1}^{s} \theta_j\right) \kappa_i$, так как $\sum_{j=1}^{s} \theta_j = 1$. Предположим, что $L(\Theta) = \sum_{i=1}^{s} \theta_i L_i$, $S(\Theta) = \sum_{i=1}^{s} \theta_i S_i$, $Q(\Theta) = \sum_{i=1}^{s} \theta_i Q_i$ и $R(\Theta) = \sum_{i=1}^{s} \theta_i R_i$. Доказательство получается напрямую из частотной теоремы, представленной в [7] в параметрической форме путем прямой подстановки.

Условия, сформулированные в теореме, являются непараметрическими и позволяют проверить ограниченность $\mathcal{H}_\infty$–нормы политопической дескрипторной системы с помощью проверки выполнения $s(s-1)$ неравенств. В отличие от результата, полученного в работе [3], данный метод является непараметрическим, а следовательно, легко реализуется в форме алгоритма.

4. Пример

Рассмотрим систему

$$
E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},
$$

$$
A_1 = \begin{bmatrix} 1.2 & -0.4 & 1.5 \\ -0.3 & 0.6 & -0.5 \\ -0.3 & 0.75 & -1.3 \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.3 \\ 0.2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},
$$

$$
A_2 = \begin{bmatrix} 1.2 & -0.4 & 1.9 \\ -0.2 & 0.3 & -0.5 \\ -0.3 & 0.75 & -1.3 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.2 \\ 0.2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},
$$

$$C_1 = C_2 = \left[\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 1 \end{array} \right], \ D_1 = D_2 = \left[\begin{array}{cc} 0.1 & 0.2 \end{array} \right].$$

Аналитически можно проверить, что система является робастно допустимой для всех значений Θ. Вычисление $\mathcal{H}_\infty$–нормы путем минимизации переменной γ на множестве переменных $\{L_i, Q_i, R_i, S_i,\}$ дает результат $\gamma_{min} = 1,2068$, что совпадает с реальной $\mathcal{H}_\infty$–нормой системы.

5. Заключение

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда №23-21-00306, https://rscf.ru/project/23-21-00306/.

Список литературы

1. Belov A.A., Andrianova O.G. and Kurdyukov A.P. Control of Discrete-Time Descriptor Systems: An Anisotropy-Based Approach. Cham: Springer, Studies in Systems, Decision and Control (SSDC, volume 157), 2018. 169 p.
2. Coutinho D., de Souza C.E. and Barbosa K.A. Robust $\mathcal{H}_\infty$ Control of Discrete-time Descriptor Systems // 2014 European Control Conference (ECC). Strasbourg, France, 2014. Strasbourg: EUCA, 2014. P. 1915–1920.
3. Rodriguez C., Barbosa K.A. and Coutinho D. A Robust $\mathcal{H}_\infty$ State-feedback Design for Discrete-time Descriptor Systems // IFAC-PapersOnLine. 2018. Vol. 51, No. 25. P. 2405–8963.
4. Belov A.A., Andrianova O.G. Robust State-feedback $\mathcal{H}_\infty$ Control for Discrete-time Descriptor Systems with Norm-bounded Parametric Uncertainties // International Journal of Systems Science. 2019. Vol. 50, No. 6. P. 1303–1312.
5. Chadli M., Darouach M. Further Enhancement on Robust $\mathcal{H}_\infty$ Control Design for Discrete-Time Singular Systems // IEEE Transactions on Automatic Control. 2014. Vol. AC-59, No. 2. P. 494–499.
6. Beidaghi S., Jalali A.A., Sedigh A.K. and Moaveni B. Robust $\mathcal{H}_\infty$ Filtering for Uncertain Discrete-time Descriptor Systems // International Journal of Control, Automation and Systems. 2017. Vol. 15. P. 1–8.
7. Feng Y., Yagoubi M. On State Feedback $\mathcal{H}_\infty$ Control for Discrete-Time Singular Systems // IEEE Transactions on Automatic Control. 2013. Vol. AC-58, No. 10. P. 2674–2679.