УДК 517.929.4

ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ СИСТЕМЫ ЛУРЬЕ НЕПРЯМОГО УПРАВЛЕНИЯ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМ ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

А.Ю. Александров

Санкт-Петербургский государственный университет

Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

E-mail: a.u.aleksandrov@spbu.ru

Н.Р. Андриянова

Санкт-Петербургский государственный университет

Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

E-mail: st040174@student.spbu.ru

Ключевые слова: система непрямого управления, распределенное запаздывание, устойчивость, функционал Ляпунова–Красовского, переключения.

Аннотация: Рассматривается система Лурье непрямого управления с несколькими нелинейностями и распределенным запаздыванием в канале обратной связи. Предполагается, что нелинейности представляют собой степенные функции с показателями степеней большими единицы. Предлагается способ построения функционала Ляпунова–Красовского, с помощью которого устанавливаются достаточные условия асимптотической устойчивости нулевого решения изучаемой системы. Находятся оценки времени переходных процессов и определяются классы возмущений, не нарушающих устойчивости. Кроме того, исследуется случай, когда в системе имеют место переключения режимов функционирования, и проводится анализ устойчивости соответствующей гибридной системы.

1. Введение

Важным классом управляемых систем являются системы Лурье непрямого регулирования [1, 2]. Правые части таких систем представимы в виде сумм линейных членов и нелинейностей секторного типа. Проблема устойчивости систем непрямого регулирования интенсивно исследовалась на протяжении нескольких десятилетий. Было получено множество важных и интересных результатов (см., например, [1–4] и цитируемую там литературу). В частности, была предложена каноническая конструкция функции Ляпунова в виде «квадратичная форма плюс интегралы от нелинейностей».

Однако следует заметить, что при моделировании широкого класса управляемых систем необходимо учитывать запаздывание в канале обратной связи. Наличие запаздывания существенно усложняет анализ устойчивости. Известно [5], что введение в модель даже малого запаздывания может приводить к потере устойчивости. Некоторые результаты об устойчивости систем непрямого управления с постоянным и переменным запаздыванием установлены, например, в работах [6–8]. В то же время, применение этих результатов к конкретным типам систем может оказаться затруднительным, особенно в случае систем с неопределенностями и несколькими нелинейностями. Поэтому актуальной задачей является нахождение классов нелинейностей, при которых условия устойчивости получаются в более простой и конструктивной форме.

В настоящей статье рассматривается система Лурье непрямого управления с несколькими нелинейностями степенного типа с показателями степеней большими единицы. Известно [9, 10], что системы с существенно нелинейными управлениями более робастны по отношению к запаздыванию и нестационарным возмущениям, чем линейные системы. В частности, в [9] были найдены условия устойчивости систем указанного вида с постоянным запаздыванием. Цель данной работы – провести анализ устойчивости в случае распределенного запаздывания в канале обратной связи. Следует отметить, что управления с распределенным запаздыванием используются в модифицированных ПИД-регуляторах для гашения нежелательных колебаний и уменьшения времени переходных процессов (см., например, [10–12] и цитируемую там литературу).

2. Постановка задачи

Рассмотрим систему

$$
\begin{cases}
\dot{x}(t) = Ax(t) + B_1 f(z(t)) + B_2 \displaystyle\int_{t-\tau}^{t} f(z(\xi))d\xi, \\
\dot{z}(t) = Cx(t) + D_1 f(z(t)) + D_2 \displaystyle\int_{t-\tau}^{t} f(z(\xi))d\xi.
\end{cases}
\tag{1}
$$

Здесь $x(t) \in \mathbb{R}^k$, $z(t) \in \mathbb{R}^m$, $f(z) = (f_1(z_1), \ldots, f_m(z_m))^\top$, где скалярные функции $f_i(z_i)$ непрерывны при $z_i \in (-\infty, +\infty)$ и удовлетворяют условиям секторного типа: $z_i f_i(z_i) > 0$ при $z_i \neq 0$, $i = 1, \ldots, m$, A, B_1, B_2, C, D_1, D_2 – постоянные матрицы соответствующих размерностей, τ – положительная постоянная. Система (1) представляет собой систему Лурье непрямого управления [1, 2] с несколькими нелинейностями и распределенным запаздыванием в канале обратной связи.

Предполагаем, что начальные функции $\varphi(\xi)$ для решений системы (1) выбираются из пространства $C([-\tau, 0], \mathbb{R}^{k+m})$ непрерывных функций с равномерной нормой $\|\varphi\|_\tau = \max_{\xi\in[-\tau,0]} \|\varphi(\xi)\|$, где $\|\cdot\|$ – евклидова норма вектора. Через $(x_t^\top, z_t^\top)^\top$ обозначим отрезок решения $(x^\top(t), z^\top(t))^\top$, т.е. $(x_t^\top, z_t^\top)^\top : \xi \mapsto (x^\top(t+\xi), z^\top(t+\xi))^\top$ при $\xi \in [-\tau, 0]$.

Система (1) имеет нулевое решение. Исследуем условия устойчивости этого решения в случае нелинейностей специального вида.

Предположение 1. *Пусть $f_i(z_i) = z_i^{\beta_i}$, где $\beta_i > 1$ – рациональные числа с нечетными числителями и знаменателями, $i = 1, \ldots, m$.*

3. Условия асимптотической устойчивости

Накладываем дополнительные ограничения на матрицы в системе (1).

Предположение 2. *Матрица A является гурвицевой.*

Предположение 3. *Матрица*

$$Q = D_1 + \tau D_2 - CA^{-1}(B_1 + \tau B_2)$$

диагонально устойчива, т.е. существует диагональная положительно определенная матрица Θ такая, что матрица $\Theta Q + Q^\top \Theta$ отрицательно определена.

Предложен специальный подход для построения функционала Ляпунова-Красовского для рассматриваемой системы. С помощью этого функционала доказана следующая теорема.

Теорема. *Пусть выполнены предположения 1–3. Тогда нулевое решение системы* (1) *асимптотически устойчиво.*

В работе также найдены оценки времени переходных процессов и определены классы возмущений, не нарушающих асимптотическую устойчивость.

Кроме того, исследовалась система с переключениями

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A^{(\sigma)}x(t) + B_1^{(\sigma)} f(z(t)) + B_2^{(\sigma)} \displaystyle\int_{t-\tau}^{t} f(z(\xi))d\xi, \\ \dot{z}(t) = C^{(\sigma)}x(t) + D_1^{(\sigma)} f(z(t)) + D_2^{(\sigma)} \displaystyle\int_{t-\tau}^{t} f(z(\xi))d\xi. \end{cases} \tag{2}$$

Здесь $\sigma = \sigma(t)$ – кусочно-постоянная непрерывная справа функция, задающая закон переключений, $\sigma(t) : [0, +\infty) \mapsto \{1, \ldots, L\}$, и имеющая на любом ограниченном промежутке конечное число точек разрыва, $A^{(s)}, B_1^{(s)}, B_2^{(s)}, C^{(s)}, D_1^{(s)}, D_2^{(s)}$ – постоянные матрицы соответствующих размерностей, $s = 1, \ldots, L$, а остальные обозначения – те же, что и для системы (1).

Сначала для подсистем, соответствующих гибридной системе (2), строился общий функционал Ляпунова–Красовского, существование которого гарантирует асимптотическую устойчивость нулевого решения при любом допустимом законе переключения. Затем в случае, когда общий функционал построить не удается, с помощью составных функционалов были установлены классы законов переключения, при которых сохраняется асимптотическая устойчивость.

4. Заключение

В настоящей работе с помощью специальной конструкции функционала Ляпунова–Красовского получены достаточные условия асимптотической устойчивости для системы Лурье непрямого управления с нелинейностями степенного типа и распределенным запаздыванием. Указанные условия представлены в достаточно простой и конструктивной форме (гурвицевость одной матрицы и диагональная устойчивость другой матрицы). Показано, что применение построенного функционала позволяет также оценить время переходных процессов, определить классы возмущений, не нарушающих устойчивости, и провести анализ устойчивости рассматриваемой системы при переключениях ее параметров. Важным направлением дальнейших исследований является распространение полученных результатов на случай распределенного запаздывания с переменным ядром.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 24-21-00091, https://rscf.ru/project/24-21-00091/.

Список литературы

1. Барбашин Е.А. Функции Ляпунова. М.: Наука, 1970. 240 с.
2. Лурье А.И. Некоторые нелинейные задачи теории автоматического регулирования. М.: Гостехиздат, 1951. 216 с.
3. Метод векторных функций Ляпунова в теории устойчивости / Под ред. А.А. Воронова и В.М. Матросова. М.: Наука, 1987. 312 с.
4. Методы исследования нелинейных систем автоматического управления / Под ред. Р.А. Нелепина. М.: Наука, 1975. 448 с.
5. Hale J.K., Verduyn Lunel S.M. Introduction to Functional Differential Equations. New York: Springer, 1993. 448 p.
6. Cao J., Zhong S. New Delay-dependent Condition for Absolute Stability of Lurie Control Systems with Multiple Time-delays and Nonlinearities // Appl. Math. Comput. 2007. Vol. 194, No. 1. P. 250–258.
7. Chen W.-H., Guan Z.-H., Lu X.-M. Absolute Stability of Lurie Indirect Control Systems with Multiple Variable Delays // Acta Math. Sin. 2004. Vol. 47, No. 6. P. 1063–1070.
8. Shatyrko A., Diblik J., Khusainov D., Rzickova M. Stabilization of Lur'e-type Nonlinear Control Systems by Lyapunov–Krasovskii Functionals // Advances in Differ. Equ. 2012. No. 1. P. 1–9.
9. Aleksandrov A., Andriyanova N. Stability Analysis of Lur'e Indirect Control Systems with Time Delay and Multiple Nonlinearities // International Journal of Dynamics and Control. 2023. Vol. 11. P. 3074–3083.
10. Aleksandrov A., Efimov D., Fridman E. Stability of Homogeneous Systems with Distributed Delay and Time-varying Perturbations // Automatica. 2023. Vol. 153. P. 111058.
11. Formal'sky A.M. On a Modification of the PID Controller // Dynamics and Control. 1997. Vol. 7. P. 269–277.
12. Shen J., Lam J. Decay Rate Constrained Stability Analysis for Positive Systems with Discrete and Distributed Delays // Systems Science & Control Engineering. 2014. Vol. 2, No. 1. P. 7–12.