.
УДК 517.925.51+531.38

ОБ ОГРАНИЧЕНИЯХ НА ПРОИЗВОДНЫЕ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ КВАДРАТИЧНОЙ ФУНКЦИИ ЛЯПУНОВА

О.Г. Антоновская
Нижегородский государственный архитектурно-строительный университет
Россия, 603000, Нижний Новгород, Ильинская ул., 65
E-mail: olga.antonovsckaja@yandex.ru

А.В. Бесклубная
Нижегородский государственный архитектурно-строительный университет
Россия, 603000, Нижний Новгород, Ильинская ул., 65
E-mail: antbesk@gmail.com

Ключевые слова: проблема синтеза оптимальных управлений, линейная автономная система дифференциальных уравнений, метод функций Ляпунова, квадратичная функция Ляпунова, производные функции Ляпунова высших порядков

Аннотация: В настоящем докладе обсуждается возможность получения ограничений на производные квадратичной функции Ляпунова высших порядков в силу линейной автономной дифференциальной системы. Для решения задачи используется методика, ранее примененная для получения ограничений на первую производную квадратичной функции Ляпунова. В качестве примера применения методики рассматривается задача нахождения ограничений на производные высших порядков для квадратичной функции Ляпунова, удовлетворяющей уже заданному ограничению на ее первую производную в силу системы и, следовательно, коэффициенты положительно определенной квадратичной формы, выбранной в качестве функции Ляпунова. Строятся ограничения на производные высших порядков квадратичной функции Ляпунова, ранее рассматриваемые в литературе. Однако приведенная методика позволяет получить и другие ограничения на производные высших порядков.

1. Введение

Известно [6], что решение многих задач синтеза оптимальных управлений возможно на основе использования аппарата функций Ляпунова (и их дискретных аналогов). Однако использование этого аппарата связано с обычными для всех методов, использующих функции Ляпунова, трудностями выбора этих функций. При этом возможно использовать в качестве функций Ляпунова простейших положительно определенных функций в виде квадратичных форм [6].

И сами квадратичные функции Ляпунова выбираются обладающими свойствами, определяемыми особенностями решаемой задачи [1].

К настоящему времени стали появляться задачи построения функций Ляпунова, удовлетворяющих не только условию отрицательности первой производной в силу рассматриваемой системы [1], но и положительности второй производной [4, 5], а также ограничений на производные высших порядков [7].

В представленной работе предлагается методика определения границ изменения производных высших порядков квадратичной функции Ляпунова. Предложенная методика иллюстрируется на примере квадратичной функции Ляпунова, удовлетворяющей заданному ограничению на ее первую производную в силу линейной автономной дифференциальной системы.

2. Общая постановка задачи и условия, дающие ее решение

Для фиксированного $n \in \mathbb{N}$ рассмотрим автономную линейную систему дифференциальных уравнений

(1) $$\dot{x} = Ax, \quad x = (x_1, \ldots, x_n)^{\text{т}} \in \mathbb{R}^n,$$

и квадратичную форму с постоянными коэффициентами

(2) $$V(x) = x^{\text{т}} K x \quad (K^{\text{т}} = K).$$

Элементы постоянных $n \times n$-матриц A и K вещественные. Первая производная $\dot{V}_{(1)}(x)$ квадратичной формы (2) в силу системы (1) также является квадратичной формой:

(3) $$\dot{V}_{(1)}(x) = x^{\text{т}} A_K^{(1)} x, \quad A_K^{(1)} = A^{\text{т}} K + KA.$$

Матрица $A_K^{(1)}$ симметрична.

Далее считаем, что собственные значения $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ матрицы коэффициентов A системы (1), т.е. корни характеристического уравнения $\det(A - \lambda E_n) = 0$, имеют отрицательные вещественные части и что квадратичная форма (2) положительно определена (здесь E_n – единичная $n \times n$-матрица). Это предположение означает, в частности, что у системы (1) имеется [3] квадратичная функция Ляпунова.

При доказательстве теоремы работы [1] было показано, что на любой поверхности уровня $V = V_0$ наибольшее и наименьшее значения $\dot{V}_{(1)}$ равны $\mu_{max} V_0$ и $\mu_{min} V_0$, где μ_{max} и μ_{min} – наибольший и наименьший корни уравнения

(4) $$\det(A_K^{(1)} - \mu K) = 0$$

(все корни этого уравнения вещественные [2]). Таким образом, отрицательность первой производной функции (2) в силу системы гарантируется выполнением неравенства $\mu_{max} < 0$. Кроме того, при всех $x \neq \mathbf{0}$ $\mu_{min} \leqslant \dot{V}_{(1)}/V \leqslant \mu_{max}$.

Рассуждая аналогично, получим, что вторая и третья производные функции (2) в силу (1) также будут квадратичными формами

(5) $$\ddot{V}_{(1)}(x) = x^{\text{т}} A_K^{(2)} x, \quad A_K^{(2)} = (A^{\text{т}})^2 K + 2A^{\text{т}} K A + K A^2,$$

$$\dddot{V}_{(1)}(x) = x^{\text{т}} A_K^{(3)} x, \quad A_K^{(3)} = (A^{\text{т}})^3 K + 3(A^{\text{т}})^2 K A + 3A^{\text{т}} K A^2 + K A^3. \tag{6}$$

(Матрицы $A_K^{(2)}, A_K^{(3)}$ симметричны.) Но тогда, на любой поверхности уровня $V = V_0$ наибольшее и наименьшее значения $\ddot{V}_{(1)}$ равны $\mu_{max}^{(2)} V_0$ и $\mu_{min}^{(2)} V_0$, где $\mu_{max}^{(2)}$ и $\mu_{min}^{(2)}$ – наибольший и наименьший корни уравнения

$$\det(A_K^{(2)} - \mu K) = 0 \tag{7}$$

(все корни этого уравнения вещественные). Таким образом, положительность второй производной функции (2) в силу системы гарантируется выполнением неравенства $\mu_{min} > 0$. Кроме того, при всех $x \neq \mathbf{0}$ $\mu_{min}^{(2)} \leqslant \ddot{V}_{(1)}/V \leqslant \mu_{max}^{(2)}$. А если квадратичная форма (2) является функцией Ляпунова системы (1) (т.е. $\dot{V}_{(1)} < 0$), то при всех $x \neq \mathbf{0}$ $\mu_{min}^{(3)} \leqslant \dddot{V}_{(1)}/\dot{V}_{(1)} \leqslant \mu_{max}^{(3)}$, где $\mu_{max}^{(3)}$ и $\mu_{min}^{(3)}$ – наибольший и наименьший корни уравнения

$$\det(A_K^{(3)} - \mu A_K^{(1)}) = 0. \tag{8}$$

3. Частный случай нахождения ограничений на производные функции Ляпунова высших порядков

Пусть квадратичная функция Ляпунова для системы (1) строится в соответствии с методикой работы [1], основанной на переходе к каноническим координатам.

Рассмотрим случай, когда все корни характеристического уравнения системы (1) вещественны и различны; без нарушения общности считаем, что $\lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_n$. Тогда существует линейное невырожденное преобразование координат

$$x = B\xi, \quad \xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)^{\text{т}} \in \mathbb{R}^n, \quad B = (b_{ij})_{i,j=1}^n, \tag{9}$$

приводящее систему к каноническому виду [2]

$$\dot{\xi} = A\xi, \quad i = \overline{1,n}, \qquad A = \operatorname{diag}[\lambda_1, \ldots, \lambda_n]. \tag{10}$$

(У матрицы B ее k-й столбец является собственным вектором матрицы A, соответствующим собственному значению λ_k, $k = \overline{1,n}$.) При этом квадратичные формы (2), (3), (5) и (6) перейдут соответственно в квадратичные формы $W(\xi)$, $\dot{W}_{(10)}(\xi)$, $\ddot{W}_{(10)}(\xi)$, и $\dddot{W}_{(10)}(\xi)$, причем [1]

$$\max_{V=V_0} \frac{\ddot{V}_{(1)}}{V} = \max_{W=V_0} \frac{\ddot{W}_{(10)}}{W}, \quad \min_{\dot{V}=\dot{V}_0} \frac{\dddot{V}_{(1)}}{\dot{V}} = \min_{\dot{W}=\dot{V}_0} \frac{\dddot{W}_{(10)}}{\dot{W}}. \tag{11}$$

Таким образом, не ограничивая общности, можно предполагать, что система (1) имеет канонический вид (10). Причем матрицы квадратичных форм (3), (5) и (6) примут вид: $A_K^{(1)} = ((\lambda_i + \lambda j) K_{ij})_{i,j=1}^n$, $A_K^{(2)} = ((\lambda_i + \lambda j)^2 K_{ij})_{i,j=1}^n$, $A_K^{(3)} = ((\lambda_i + \lambda j)^3 K_{ij})_{i,j=1}^n$.

Построим для системы (1) квадратичную функцию Ляпунова (2), удовлетворяющую равенству $\max\limits_{V=V_0\neq 0} \dot V_{(10)} = \delta V_0$, где в качестве заранее выбранной величины δ можно взять любое число из полуинтервала $[2\lambda_n, 0)$.

Квадратичную функцию Ляпунова с $\max\limits_{V=V_0\neq 0} \dot V_{(10)} = \delta V_0$, зададим следующим образом:

$$V(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) = \sum_{i=1}^{n-2} K_{ii}\xi_i^2 + K_{n-1,n-1}\xi_{n-1}^2 + 2K_{n-1,n}\xi_{n-1}\xi_n + K_{nn}\xi_n^2, \tag{12}$$

где $K_{ii} > 0$, $i = \overline{1,n}$, $K_{n-1,n}^2 = (1 - R(\delta))K_{n-1,n-1}K_{nn}$, а $R(\delta) = (\lambda_{n-1} - \lambda_n)^2(\lambda_{n-1} + \lambda_n - \delta)^{-2}$, т.е. матрица K построенной квадратичной формы имеет вид

$$K = \mathrm{diag}\left[K_{11}, \ldots, K_{n-2,n-2}\,, \begin{pmatrix} K_{n-1,n-1} & K_{n-1,n} \\ K_{n-1,n} & K_{n,n} \end{pmatrix}\right]. \tag{13}$$

Несложно убедиться, что при условии $\delta \in [2\lambda_n, 0)$ величина $R(\delta)$ принадлежит полуинтервалу $((\lambda_{n-1} - \lambda_n)^2(\lambda_{n-1} + \lambda_n)^{-2}, 1]$, а квадратичные формы с матрицами K и $A_K^{(1)}$ соответственно положительно и отрицательно определены. В этом случае корнями уравнения (7) являются: $\mu_{n-1,n}^{(2)} = [R(\delta)(\lambda_{n-1} + \lambda_n)^2 - 2\lambda_{n-1}\lambda_n \pm \sqrt{R(\delta)(\lambda_{n-1}^2 + \lambda_n^2)^2 + 4(1 - R(\delta))\lambda_{n-1}^2\lambda_n^2}](R(\delta))^{-1}$, $\mu_i^{(2)} = 4\lambda_i^2$ $(i = \overline{1, n-2})$. Величины $\mu_i^{(2)}$ $(i = \overline{1, n-2})$ очевидно положительны. А $\mu_{n-1,n}^{(2)} > 0$ при $R(\delta) \in (1 - 4\lambda_{n-1}^2\lambda_n^2(\lambda_{n-1} + \lambda_n)^{-2}, 1]$. То есть $\ddot V_{(10)}$ положительна при $R(\delta) \in (1 - 4\lambda_{n-1}^2\lambda_n^2(\lambda_{n-1} + \lambda_n)^{-2}, 1]$. При этом в неравенстве $\mu_{min}^{(2)} \leqslant \ddot V_{(1)}/V \leqslant \mu_{max}^{(2)}$ $\mu_{min}^{(2)} = \min\{\mu_{n-2}^{(2)}, \mu_{n-1}^{(2)}\}$, $\mu_{max}^{(2)} = \max\{\mu_1^{(2)}, \mu_n^{(2)}\}$.

При $R(\delta) = 1$ (т.е. $\delta = 2\lambda_n$) $\mu_i^{(2)} = 4\lambda_i^2$ $(i = \overline{1,n})$, т.е. вторая производная $\ddot V_{(10)}$ положительна, причем $\mu_{min}^{(2)} = 4\lambda_n^2$, а $\mu_{max}^{(2)} = 4\lambda_1^2$.

Корнями уравнения (8) являются: $\mu_{n-1,n}^{(2)} = [(\lambda_{n-1} - \lambda_n)^4 - R(\delta)(\lambda_{n-1} + \lambda_n)^4 \pm \sqrt{D}]((\lambda_{n-1} - \lambda_n)^2 - R(\delta)(\lambda_{n-1} + \lambda_n)^2)^{-1} <$ где $D = \lambda_{n-1}\lambda_n[-3(\lambda_{n-1} - \lambda_n)^2 + r(\delta)[4(\lambda_{n-1} + \lambda_n)^2] - (\lambda_{n-1} - \lambda_n)^2]$, $\mu_i^{(2)} = 4\lambda_i^2$ $(i = \overline{1, n-2})$. При этом в неравенстве $\mu_{min}^{(3)} \leqslant \dddot V_{(1)}/\dot V_{(1)}V \leqslant \mu_{max}^{(3)}$ при условии, что величина $R(\delta)$ принадлежит полуинтервалу $((\lambda_{n-1} - \lambda_n)^2(\lambda_{n-1} + \lambda_n)^{-2}, 1]$, т.е. первая производная функции Ляпунова отрицательна, $\mu_{min}^{(3)} = \min\{\mu_{n-2}^{(3)}, \mu_n^{(3)}\}$, $\mu_{max}^{(3)} = \max\{\mu_1^{(3)}, \mu_{n-1}^{(3)}\}$.

При $R(\delta) = 1$ (т.е. $\delta = 2\lambda_n$) $\mu_i^{(3)} = 4\lambda_i^2$ $(i = \overline{1,n})$, причем $\mu_{min}^{(3)} = 4\lambda_n^2$, а $\mu_{max}^{(3)} = 4\lambda_1^2$.

Список литературы

1. Антоновская О.Г. О построении квадратичной функции Ляпунова с заданными свойствами // Дифференциальные уравнения. 2013. Т. 49, № 9. С. 1220–1224.
2. Антоновская О.Г. О сохранении квадратичной функции Ляпунова линейной дифференциальной автономной системы при стационарных возмущениях ее коэффициентов // Дифференциальные уравнения. 2023. Т. 59, № 3. С. 295–302.
3. Барбашин Е.А. Функции Ляпунова. М.: Наука, 1970. 240 с.
4. Кириченко В.В., Ковалев А.М. Построение функций с положительной второй производной для линейной системы дифференциальных уравнений // Труды ИПММ НАН Украины. 2008. Т. 17. С. 74–79.

5. Кириченко В.В. Использовние метода диагонализации при построении функции Ляпунова для линейных систем дифференциальных уравнений // Труды ИПММ НАН Украины. 2009. Т. 18. С. 85–93.
6. Кунцевич В.М., Лычак М.М. Синтез систем автоматического управления с помощью функций Ляпунова. М.: Наука, 1977. 400 с.
7. Цыганков А.А. Производные функций Ляпунова высших порядков // Дифференциальные уравнения. 2004. Т. 40. № 2. С. 277–279.