УДК 62-54.14:681.511.4

ОБ ОСОБЕННОСТЯХ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ МЕТОДА ТОЧЕЧНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ ПРИ ИССЛЕДОВАНИИ СИСТЕМЫ С КОМБИНИРОВАННЫМ ЧАСТОТНО-ФАЗОВЫМ УПРАВЛЕНИЕМ

О.Г. Антоновская

Нижегородский государственный архитектурно-строительный университет

Россия, 603000, Нижний Новгород, Ильинская ул., 65

E-mail: olga.antonovsckaja@yandex.ru

М.С. Киняпина

Волжский государственный университет водного транспорта

Россия, 603950, Нижний Новгород, Нестерова ул., 5

E-mail: marinakin1@yandex.ru

Ключевые слова: управляемые системы, управляющий сигнал, математическое моделирование, метод точечных отображений

Аннотация: Известно, что практические потребности в разработке способа быстрой перестройки автоколебательных систем на основе использования информации о фазо-частотных свойствах их колебаний диктует необходимость развития приемов качественно-численного моделирования динамики соответствующих систем управления. В настоящем докладе на примере исследования динамики системы с частотно-фазовым управлением рассматривается методика построения математической модели, основанная на применении метода точечных отображений, использующая кусочно-постоянную форму сигнала управления и позволяющая проанализировать механизм взаимодействия фазового и частотного управления. В результате пространство состояний системы состоит из трех основных подпространств и двух подпространств переходных движений, в каждом из которых поведение фазовых траекторий определяется уравнениями с постоянной структурой. Вследствие принципиальной нелинейности процессов в системе, разработка процедуры их моделирования является актуальной.

1. Введение

Использование степени заполнения счетчика числа колебаний постраиваемого генератора (ПГ) в качестве фазовой координаты позволяет не только обоснованно реализовать процедуру получения разностных уравнений по методу точечных отображений, но и расширить возможности качественного анализа динамики синтезаторов частот (СЧ) с кусочно-постоянно формой сигнала управления [1].

В настоящем докладе излагаются основные моменты применения указанной методики к исследованию динамики системы синхронизации с комбинированной широтно-импульсной модуляцией управляющего сигнала. В качестве базовой модели используется СЧ с комбинированным импульсным частотно-фазовым детектором (КИЧФД) [4]. Такой СЧ объединяет в себе принцип управления по числу импульсов (частотное детектирование (ЧД)) и принцип управления по временному рассогласованию (импульсное фазовое детектирование (ИФД)) двух соседних во времени импульсов, а именно: импульса синхронизирующего опорного сигнала (ОС) и выходного импульса счетчика (С) числа периодов подстраиваемого генератора (ПГ). Фазовое управление функционирует в случае, если импульсы ОС чередуются во времени с выходными импульсами С. Частотное управление включается, если процесс чередования импульсов ОС и С нарушается. При появлении во времени подряд двух или более импульсов С принудительно устанавливается минимально возможное значение сигнала управления, а при появлении во времени подряд двух или более импульсов ОС - его максимально возможное значение.

2. Использование метода точечных отображений для построения математической модели системы

Сущность использования метода точечных отображений для изучения динамики СЧ с КИЧФД [3] состоит в использовании для рассмотрения динамики СЧ фазовых подпространств, соответствующих постоянству структуры дифференциального уравнения

$$\alpha(d\theta/d\tau) = g(u(\tau)) \quad (0 \leqslant \tau \leqslant 1,\, 0 \leqslant \theta \leqslant 1), \tag{1}$$

описывающего процесс заполнения счетных декад С. Уравнение (1) определено на единичном отрезке безразмерного времени τ, равном периоду ОС; θ – безразмерная, нормированная на единицу, координата С, причем после заполнения С при $\theta = 1$ происходит мгновенный сброс на значение $\theta = 0$ и при этом на выходе С появляется управляющий импульс; α – безразмерный показатель С, причем значение $\alpha = 1$ соответствует неуправляемому ПГ, когда $u(\tau) = 0$; $g = 1 + Su$ – линейная характеристика ПГ с крутизной $S > 0$.

Согласно логике работы КИЧФД режим частотного детектирования (ЧД) с минимально возможным значением $u(\tau) = \underline{u}$ включается в режиме импульсно-фазового детектиирования (ИФД) при появлении повторного импульса С, а с максимальным значением $u(\tau) = \bar{u}$ – при появлении повторного импульса ОС. При чередовании импульсов С и ОС в режиме ФД, ближайший приходящий во времени импульс ОС запускает генератор пилообразного напряжения так, что на его выходе появляется сигнал управления

$$u(\tau) = (\bar{u} - \underline{u})\tau + \underline{u} \quad (0 \leqslant \tau \leqslant 1). \tag{2}$$

При использовании импульсного фазового детектора типа «выборка-запоминание» $u(\tau) = u(\tau_0) = const$, где τ_0 – момент прихода импульса С. Поскольку в режимах ЧД и ИФД структура уравнения (1) неизменна, можно считать, что при $u(\tau) = \underline{u}$ уравнение (1) определено в подпространстве Π_1, при $u(\tau) = \bar{u}$ – в подпространстве Π_3 и в режиме ИФД с $u(\tau)$, определяемой выражением (2) – в подпространстве Π_2.

Фазовое пространство Π_2, в котором определено уравнение (1) при условии (2) есть развертка фазового тора. Изображающая точка движения (ИТД) начинает свое движение в Π_2 при $\theta = 0$ с фазовым положением $\tau = \tau_0$ и подчиняется уравнению фазовой траектории

$$\theta(\tau) = g(u(\tau_0))(\tau - \tau_0) \quad (\tau_0 \leqslant \tau \leqslant 1) \tag{3}$$

и при увеличении может достигнуть либо границы $\theta = 1$, либо границы $\tau = 1$ подпространства Π_2.

Достижение ИТД границы $\theta = 1$ [2] означает появление при $\tau = \bar{\tau} < 1$ повторного импульса С, что переводит ИТД в подпространство Π_1 частотного управления с понижением частоты ПГ при $u = \underline{u}$. При этом состояние $\theta = 1, \tau = \bar{\tau}$ подпространства Π_2 переходит в начальное состояние движения в Π_2, порождая отображение

$$T_{21}: \quad \bar{\tau} = \tau_0 + (\alpha/g(u_0)), \tag{4}$$

где $\alpha < \alpha_1(\tau_0) = (g(u(\tau_0))(1 - \tau_0)$ $(0 \leqslant \tau \leqslant 1)$,

Достижение ИТД границы $\tau = 1$ [2] означает появление повторного импульса ОС, сброс фазовой координаты τ со значения $\tau = 1$ на значение $\tau = 0$ и переход к дальнейшему рассмотрению динамики движения в следующем периоде ОС. Если в течение этого второго периода ИТД вновь приходит на границу $\tau = 1$, то это означает появление повторного импульса ОС, что переводит ИТД в пространство Π_3 частотного управления с повышением частоты ПГ при $u = \bar{u}$. При этом состояние $\theta = \bar{\theta}$, $\tau = 1$ подпространства Π_2 переходит в начальное состояние $\theta = \bar{\theta}$, $\tau = 0$ движения в Π_3, порождая отображение

$$T_{23}: \quad \bar{\theta} = (1/\alpha)g(u_0)(2 - \tau_0), \tag{5}$$

где $\alpha > \alpha_2(\tau_0) = (g(u(\tau_0))(2 - \tau_0)$ $(0 \leqslant \tau \leqslant 1)$.

Если в течение указанного выше второго периода ОС ИТД приходит на границу $\theta = 1$, то реализуется режим чередования импульсов С и ОС, и СЧ остается в режиме фазового управления. При этом порождается отображение

$$T_{22}: \quad \bar{\tau} = \tau_0 + (\alpha/g(u_0)) - 1 \, (\tau_0, \bar{\tau} \in \Pi_2, \alpha_1(\tau_0) < \alpha < \alpha_2(\tau_0)). \tag{6}$$

Анализ свойств фазовых траекторий с начальными условиями $\theta = 0$ $\tau = \tau_0$ в Π_1 показывает, что ИТД может оставаться в Π_1, порождая отображение

$$T_{11}: \quad \bar{\tau} = \tau_0 + (\alpha/\underline{\alpha}) - 1 \quad (0 \leqslant \tau_0 \leqslant 2 - (\alpha/\underline{\alpha}), \underline{\alpha} < \alpha < 2\underline{\alpha}), \tag{7}$$

где $\underline{\alpha} = g(\underline{u}), \bar{\alpha} = g(\bar{u})$, а может переходить в подпространство Π_2 в соответствии с отображением

$$T_{12}: \quad \bar{\tau} = \tau_0 + (\alpha/\underline{\alpha}) - \bar{m} \tag{8}$$

где $2 - (\alpha/\underline{\alpha}) \leqslant \tau_0 \leqslant 1, \underline{\alpha} < \alpha < 2\underline{\alpha}; 0 \leqslant \tau_0 < 1, \alpha \geqslant 2\underline{\alpha}$, $\bar{m} = E[\tau_0 + (\alpha/\underline{\alpha})]$, E – знак взятия целой части, а $\bar{m} \geqslant 2$.

Аналогичная ситуация имеет место в подпространстве Π_3, а именно ИТД может оставаться в подпространстве Π_3, порождая отображение

$$T_{33}: \quad \bar{\theta} = \theta_0 - (\bar{\alpha}/\alpha) \quad (0 \leqslant \theta_0 \leqslant 2 - (\bar{\alpha}/\alpha), \bar{\alpha}/2 < \alpha < \bar{\alpha}), \tag{9}$$

и переходить в подпространство Π_2 в соответствии с отображением

$$T_{32}: \quad \bar{\tau} = (\alpha/\bar{\alpha})(1 - \theta_0 + E[\theta_0 + \bar{\alpha}/\alpha]) - 1 \tag{10}$$

где $(2 - (\bar{\alpha}/\alpha) \leqslant \theta_0 \leqslant 1, \bar{\alpha}/2 < \alpha < \bar{\alpha}; 0 \leqslant \theta_0 \leqslant 1, \alpha < \bar{\alpha}/2)$.

3. О возможности качественного исследования системы

Отображение T_{22}, определяющее динамику СЧ в режиме ИФД, имеет единственную неподвижную точку. Подставляя в (6) условие $\tau_0 = \bar{\tau} = \tau^*$, находим, что для линейной характеристики ПГ

$$\alpha = \alpha(\tau^*) = g(u(\tau^*)) = 1 - S[(\bar{u} - \underline{u})\tau^* + \underline{u}]. \tag{11}$$

График функции $\alpha = \alpha(\tau^*)$ (11) удовлетворяет при $0 \leqslant \tau^* \leqslant 1$ системе неравенств $\alpha_1(\tau^*) < \alpha < \alpha_1(\tau^*)$ и, следовательно, неподвижная точка $\tau_0 = \tau^*$ существует во всей полосе удержания, т.е. при $\underline{\alpha} < \alpha < \bar{\alpha}$. Неравенства $\tau^* > 0, \tau^* < 1$ и $g(\underline{u}) > 0$ определяют на плоскости α, S треугольную область существования синхронного режима и невырожденности ($g(\underline{u}) > 0$) характеристики ПГ

$$0 < \frac{1-\alpha}{|\underline{u}|}, \frac{1-\alpha}{|\underline{u}|} < S < \frac{1}{|\underline{u}|} \, (\underline{u} < 0, \bar{u} > 0). \tag{12}$$

Из вида ФП (6) следует, что условие устойчивости неподвижной точки $\tau_0 = \tau^*$ $|d\bar{\tau}/d\tau_0(\tau_0 = \tau^*)| < 1$ нарушается на границе

$$N_- : \quad S = 2\alpha/(\bar{u} - \underline{u}), \tag{13}$$

которая отсекает от треугольной области существования (12) ее левую верхнюю часть (в сторону уменьшения α и увеличения S). Тем самым определена область существования и устойчивости в «малом» неподвижной точки $\tau_0 = \tau^*$ в режиме ИФД.

Непосредственно из вида функций последования (ФП) (7), (9) следует, что ИТД при любых значениях параметров уходит из Π_1 и Π_3 в Π_2. Таким образом, для определения устойчивости τ^* в «большом» необходимо рассмотреть вопрос о существовании и устойчивости циклов отображений $T_{32}T_{23}$ и $T_{12}T_{21}$.

Несложный анализ ФП указанных отображений показал, что в той части области удержания, где

$$1 + ((2\underline{u} = \bar{u})S/3 < \alpha < 3(1 + S\bar{u})[(\bar{u} - 2\underline{u})S - 1]/[4S(\bar{u} - \underline{u})], \tag{14}$$

у цикла $T_{32}T_{23}$ существует неподвижная точка τ^{**}, которая, однако, всегда неустойчива. А это обеспечивает для τ^* устойчивость в «большом».

Список литературы

1. Антоновская О.Г. Горюнов В.И. Качественный анализ динамики синтезатора частоты комбинированным управлением // Системы синхронизации, формирования и обработки сигналов. 2015. № 2(46). С. 18–20.
2. Антоновская О.Г., Горюнов В.И. Моделирование процесса склейки фазовых траекторий в системе с комбинированным частотно-фазовым управлением // Известия Института математики и информатики УдГУ. 2015. № 2(46). С. 6–12.
3. Антоновская О.Г., Горюнов В.И. Метод точечных отображений в динамике системы с комбинированным частотно-фазовым управлением // Труды X Всероссийсикой научной конференции «Нелинейные колебания механических систем». Н. Новгород: Изд-во ННГУ, 2016. С. 52–57.
4. Левин В.А., Малиновский В.Н., Романов С.К. Синтезаторы частот с системой импульсно-фазовой автоподстройки. М.: Радио и связь, 1989. 232 с.