УДК 681.5.037

АГРЕГИРОВАНИЕ КОНСЕРВАТИВНЫХ СИСТЕМ С ФАЗОВЫМИ СДВИГАМИ В КОЛЕБАНИЯХ

И.Н. Барабанов
Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН
Россия, 117997, Москва, Профсоюзная ул., 65
E-mail: ivbar@ipu.ru

В.Н. Тхай
Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН
Россия, 117997, Москва, Профсоюзная ул., 65
E-mail: tkhai@ipu.ru

Ключевые слова: консервативные системы, притягивающий цикл, агрегирование.

Аннотация: Рассматривается множество многомерных консервативных систем, допускающее, как одно целое, одночастотное колебание; фаза колебания в каждой системе – индивидуальная. Решается задача агрегирования этого множества в связанную систему с притягивающим циклом, близким к колебанию несвязанных систем. Применяется метод агрегирования, основанный на выделении одной системы как регулятора, в то время как остальные системы становятся объектами управления. В докладе анонсируется основной результат. Ранее задача решалась для множества консервативных систем, в котором все фазы совпадали.

1. Введение

Агрегирование проводится для получения связанной системы с заданным динамическим свойством. Способы агрегирования сложных систем методом Ляпунова приводятся в [1]. В [2] для модели, содержащей слабо связанные подсистемы, предложено находить связи–управления, гарантирующие существование, устойчивость и стабилизацию колебания связанной системы. Тем самым задача агрегирования приводится к задаче управления. Идея [2] реализовывалась для механических систем в [3–6]. Агрегирование индентичных обратимых систем с одной степенью свободы, которые в частном случае являются консервативными, проводилось в [4]: в связанной системе конструировался притягивающий цикл. Предполагалось, что отдельная система обладает семейством невырожденных симметричных периодических движений (СПД). Поэтому множество этих систем, рассматриваемое как единая механическая система, также допускает семейство невырожденных СПД. Эти результаты в [7] распространены на многомерные консервативные системы.

2. Постановка задачи

Рассматривается система из m консервативных систем, описываемых уравнениями Лагранжа второго рода: в i-й системе для вектора обобщенных координат применяется обозначение $q^i = (q_1^i, \ldots, q_{n_i}^i)^{\mathrm{T}}$. Предполагается, что отдельная система допускает одночастотное колебание, которые образуют семейство $\Sigma_i(h_i) = \{\varphi_1(h_i, t)\}$ по постоянной энергии h_i. Рассматривается невырожденное семейство, на которм период $T_i(h_i)$ мотонотнно меняется с параметром h_i.

Предполагается, что множество Υ из m систем, рассматриваемое как одна система, допускает одночастотное колебание. Тогда оно принадлежит невырожденному семейству $\Sigma(h)$ по параметру h: h – постоянная энергии всей системы. При этом фаза в колебании каждой системы может быть произвольной.

Ставится задача агрегирования рассматриваемых m консервативных систем в связанную систему с притягивающим циклом, близким к колебанию несвязанных систем и произвольными фазами в каждой системе. Находятся универсальные связи–управления между системами, которые пригодны для любой механической системы. Ранее рассматривались различные акспекты поставленной задачи для систем на плоскости в [8].

3. Метод агрегирования

Идея метода агрегирования предложена в [9], где применялась для агрегирования автономных подсистем, допускающих устойчивые циклы. В [9] идея реализовалась как подход в теории вынужденных колебаний. В настоящем докладе рассматривается другая ситуация. Подсистемы – консервативные механические системы – допускают колебания, устойчивость которых необходимо обеспечить в процессе агрегирования. Поэтому идея реализуется в рамках теории управления.

Рассмотрим управляемую механическую систему, включающую m консервативных механических систем, и запишем ее в виде

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L^i}{\partial \dot{q}_s^i} - \frac{\partial L^i}{\partial q_s^i} = \varepsilon \sigma_s u_s^i(q, \dot{q}), \quad s = 1, \ldots, n_i, \quad i = 1, \ldots, m, \tag{1}$$

где L^i – Лагранжиан i-й системы, $u^i = (u_1^i, \ldots, u_{n_i}^i)^{\mathrm{T}}$ – вектор ее управления, при этом число σ_s равняется $+1$ или -1. Поскольку в связанной системе (1) рабочим режимом предполагается иметь притягивающий цикл, то функции $u_s^i(q, \dot{q})$ выбираются не зависящими явно от времени t. Сам цикл, по определению, представляет собой изолированное периодическое решение автономной системы. В i-системе колебанию с периодом $T_i = T_i^*$ соответствует значение параметра $h_i = h_i^*$.

Рассмотрим систему с номером $i = 1$, для которой управление выбирается в виде

$$u_s^1 = \left[1 - K_1(h_1)\sum_{s=1}^{n_1}\left(q_s^1\right)^2\right]\sum_{j=1}^{n_i} r_{sj}^1 \dot{q}_j^1, \tag{2}$$

с постоянной матрицей $\|r^1_{sj}\|$. Тогда получается амплитудное уравнение

(3) $$I_1(h_1) \equiv \int\limits_0^{T_1^*} \sum_{j=1}^{n_1} u^1_{sj}\psi^1_j dt = 0,$$

дающее необходимое условие существования цикла с периодом T_1^* в первой системе. Через $\{\psi^1_j(h_1,t)\}$ обозначено решение сопряженной системы к уравнениям в вариациях для периодического решения системы. При этом для консервативной системы в силу симметричности матрицы уравнений в вариациях для симметричного периодического движения (СПД) сопряженной системы удовлетворяют равенствам $\psi^i_j = -\dot{q}^1_j$, $j = 1,\ldots,n_i$.

Функция $K_1(h_1)$ находится из тождественного по h_1 выполнения амплитудного уравнения (4). Значит, при замене в (4) верхнего предела T_1^* на функцию $T_1(h_1)$ получается

(4) $$K_1(h_1) = \frac{\int\limits_0^{T_1} \sum\limits_{j,s=1}^{n_1} r^1_{sj}\dot{\varphi}^1_j(h_1,t)\dot{\varphi}^1_s(h_1,t)dt}{\int\limits_0^{T_1} \sum\limits_{s=1}^{n_1}(\varphi^1_s(h_1,t))^2 \sum\limits_{j=1}^{n_i} r^1_{sj}\dot{\varphi}^1_s(h_1,t)\dot{\varphi}^1_j(h_1,t)dt}$$

Первая система на множестве $\Sigma_1(h_1)$ задает отображение $\tau : 0 \to T_1^*$. Поэтому простой корень амплитудного уравнения (4) гарантирует существование неподвижной точки, а условие

$$\sigma_1 \frac{dI_1(h_1^*)}{dh_1} < 0$$

является достаточным для устойчивости этой точки.

Вычисляется производная

(5) $$\frac{dI_1(h_1^*)}{dh_1} = \chi_1\nu_1, \quad \chi_1 = \frac{dK_1(h_1^*)}{dh_1}, \quad \nu_1 = \int\limits_0^{T_1^*} \sum_{s,j=1}^{n_i} r^i_{sj}\dot{\varphi}^i_j\dot{\varphi}^i_s dt.$$

Тогда достаточное условие существования изолированного $T(h_1^*)$-периодического решения дается неравенством $\chi_1 \neq 0$. В этом случае из СПД рождается единственное колебание – цикл.

В [10] доказывается, что для отдельной системы при $\chi_1 \neq 0$ выбором надлежащей матрицы $\|r^i_{sj}\|$ всегда реализуется орбитально асимптотически устойчивый цикл. При этом в управлении (2) в зависимости от знака производной χ_1 используется множитель $\sigma_1 = 1$ при $\chi_1 < 0$ или $\sigma_1 = -1$ при $\chi_1 > 0$.

Для системы с номером $i > 1$ управления выбираются в виде

(6) $$u^i_s = \left[1 - K_i(h_1, h_i, \delta_i)\sum_{s=1}^{n_i}(q^1_s)^2\right]\sum_{j=1}^{n_i} r^i_{sj}\dot{q}^i_j, \quad i = 2,\ldots m,$$

в которых $\|r^i_{sj}\|$ – постоянная матрица, а δ_i – сдвиг фаз в колебаниях первой и i-й систем. Тогда система (1) распадается на $m-1$ независимых подсистем

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\frac{\partial L^1}{\partial \dot q^1_s} - \frac{\partial L^1}{\partial q^1_s} = \varepsilon\sigma_1 u^1_s(q^1,\dot q^1),\\
&\frac{d}{dt}\frac{\partial L^i}{\partial \dot q^i_s} - \frac{\partial L^i}{\partial q^i_s} = \varepsilon\sigma_i u^i_s(q^i,\dot q^i),\\
&i=2,\dots,m,
\end{aligned} \tag{7}$$

содержащих по две системы с номерами 1 и i. Тем самым происходит декомпозиция системы (1), смысл которой состоит в выделении первой системы, как регулятора, чей режим притягивающего цикла навязывается $m-1$ других систем. При этом сдвиги фаз становятся параметрами системы управления: каждая из $m-1$ систем движется со своим желаемым сдвигом фаз.

Исследуем в (7) систему с номером i. Выпишем систему амплитудных уравнений

$$\begin{aligned}
&I_1(h_1) \equiv \int_0^{T_1^*}\sum_{j=1}^{n_1} u^1_{sj}\psi^1_s dt = 0,\\
&I_i(h_1,h_i,\delta_i) \equiv \int_0^{T_i^*}\sum_{j=1}^{n_i} u^i_{sj}\psi^i_s dt = 0
\end{aligned} \tag{8}$$

с управелениями (2) и (6). Простой корень (h_1^*, h_i^*) этой системы гарантирует существование цикла в системе из двух управляемых консервативных систем. В системе (8) первое уравнение отделяется от второго. Условие $\sigma_1\chi_1\nu_1 < 0$ является достаточным условием существание цикла в первой управляемой консервативной системе. Поэтому анализ второго уравнения, в котором принято $h_1 = h_1^*$, приведет к условиям существования искомого цикла.

В результате получается

$$\begin{aligned}
&K_i(h_1,h_i,\delta_i) = \frac{\int_0^{T_1}\sum_{j,s=1}^{n_i} r^i_{sj}\dot\varphi^i_j(h_i,t+\delta_i)\dot\varphi^i_s(h_i,t+\delta_i)dt}{\int_0^{T_i}\sum_{s=1}^{n_1}(\varphi^1_s(h_1,t))^2\sum_{j=1}^{n_i} r^i_{sj}\dot\varphi^i_s(h_i,t+\delta_i)\dot\varphi^i_j(h_i,t+\delta_i)dt},\\
&\frac{dI_i(h_1^*,h_i^*,\delta_i)}{dh_i} = \chi_i\nu_i, \quad \chi_i = \frac{dK_i(h_1^*,h_i^*,\delta_i)}{dh_i},\\
&\nu_i = \int_0^{T_i^*}\sum_{s,j=1}^{n_i} r^i_{sj}\dot\varphi^i_j(h_i,t+\delta_i)\dot\varphi^i_s(h_i,t+\delta_i)dt.
\end{aligned} \tag{9}$$

Доказывается, что условие $\chi_1 \neq 0$ приводит к неравенству $\chi_i \neq 0$. Выбираются матрицы $\|r^i_{sj}\|$, отвечающие положительно определенным квадратичным формам.

Перебором в системе (7) всех номеров $i = 2,\dots,m$, получим основной результат агрегирования, который формулируется в виде следующей теоремы.

Теорема. *Пусть множество Υ из m консервативных систем, рассматриваемое как одна система, допускает одночастоное колебание. Тогда задача агрегирования Υ в одну систему с притягивающим циклом решается управлениями* (2) *и* (6), *если выполнено условие $\sigma_1\chi_1 < 0$. При этом все консервативные системы сохраняют начальную фазу в колебании, а числа σ_i, $i = 2,\ldots,m$, выбираются из неравенств $\sigma_i\chi_i < 0$.*

4. Заключение

Множество консервативных систем, которое допускает одночастотное колебание, всегда агрегируется в одну систему с притягивающим циклом с сохранением начальной фазы в колебании каждой системы. Применяемый метод основан на выделении одной системы как регулятора, при этом остальными системы рассматриваются как объекты управления.

Список литературы

1. Александров А.Ю., Платонов А.В. Метод сравнения и устойчивость движений нелинейных систем. М.-Ижевск: URSS, 2012. 268 с.
2. Тхай В.Н. Стабилизация колебаний автономной системы // Автоматика и телемеханика. 2016. № 6. С. 38–46.
3. Barabanov I.N., Tkhai V. N. Oscillations and Stability in the Coupled Mechanical System // J. Phys.: Conf. Ser. 2021. Vol. 1959. P. 0120031.
4. Barabanov I.N., Tkhai V.N. Aggregation of Identical Mechanical Systems with Oscillations // IOP Conf. Ser.: Mater. Sci. Eng. 2021. Vol. 1164. P. 012078.
5. Барабанов И.Н., Тхай В.Н. Стабилизация цикла в связанной механической системе // Автоматика и телемеханика. 2022. № 1. С. 67–76.
6. Барабанов И.Н., Тхай В.Н. Стабилизация колебаний связанных консервативных систем // Изв. РАН. ТиСУ. 2022. № 2. С. 22–28.
7. Барабанов И.Н., Тхай В.Н. Агрегирование многомерных консервативных систем с колебаниями // Изв. РАН. ТиСУ. 2024 (в печати).
8. Тхай В.Н. Притягивающщмй цикл в связанной механической системе с фазовыми сдвигами в колебаниях подсистем // Автоматика и телемеханика. 2023. № 12. С. 120–132.
9. Тхай В.Н. Агрегирование автономной системы с притягивающим циклом // Автоматика и телемеханика. 2022. № 3. С. 41–53.
10. Тхай В.Н. Стабилизация колебания управляемой механической системы с N степенями свободы // Автоматика и телемеханика. 2020. № 9 . С. 93–104.