УДК 531.01

УПРАВЛЕНИЕ КОЛЕБАНИЯМИ МАЯТНИКА И ЗАМЕНА НЕЗАВИСИМОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

А.А. Буров
Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» Российской академии наук
Россия, 119333, Москва, Вавилова, д.44, кор.2
E-mail: jtm@yandex.ru

В.И. Никонов
Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» Российской академии наук
Россия, 119333, Москва, Вавилова, д.44, кор.2
E-mail: nikon_v@list.ru

Ключевые слова: Маятник с подвижной точкой подвеса, маятник переменной длины, замена независимой переменной

Аннотация: Изучается задача о движении тяжелого маятник переменной длины с подвижной точкой подвеса, совершающей наперед заданное движение по вертикали. Указаны законы изменения длины маятника и движения точки подвеса, при которых уравнение движения может быть сведено к уравнению движения математического маятника постоянной длины. Определены управляющие воздействия, обеспечивающие требуемое движение.

1. Постановка задачи и основное утверждение

Рассмотрим тяжелый математический маятник, совершающий движение в неизменной вертикальной плоскости. Пусть Oxz – система отсчета, ось Ox которой горизонтальна, а ось Oz направлена вертикально вверх. Предположим, что C – точка подвеса маятника – движется вдоль вертикальной оси, и ее координаты записываются как $(0, z)$. Пусть $\ell = \ell(t)$ – длина маятника, вообще говоря, зависящая от времени. Будем считать, что движение точки подвеса задано как функция времени: $z = z(t)$. Решается задача определения закона изменения длины маятника, а также замены независимой переменной, приводящие уравнения движения маятника к уравнениям движения тяжелого маятника в однородном поле силы тяжести. Кроме того, определяется управляющее воздействие – сила F_ℓ, обеспечивающая требуемое изменение длины маятника.

Предположим, что в выбранных единицах размерности масса маятника m, сосредоточенная в его конечной точке, равна единице. Положение маятника будем определять с помощью угла φ, отсчитываемого от нисходящей вертикали. Ускорение силы тяжести положим равным g_0.

Уравнения движения могут быть записаны в виде

$$(1)\qquad \frac{d}{dt}\left(\ell^2\dot{\varphi}\right) + g(t)\ell\sin\varphi = 0, \quad g(t) = g_0 + \ddot{z},$$

$$(2)\qquad \frac{d^2\ell}{dt^2} = (g+\ddot{z})\cos\varphi + \ell\dot{\varphi}^2 + F_\ell, \quad \frac{d^2}{dt^2}\left(z - \ell\cos\varphi\right) = -g_0 + F_z.$$

Уравнение (1) определяет движение маятника. Первое и второе уравнения (2) предназначены для определения управляющих воздействий – сил F_ℓ и F_z, благодаря которым осуществляются наперед заданные изменения длины маятника и движение точки подвеса.

Пусть

$$(3)\qquad \ell = \ell_0 f(t); \qquad g(t) = g_0 a(t).$$

Подставим эти выражения в уравнение (1) и умножим левую и правую части получившегося уравнения на $f^2(t) > 0$. После преобразований имеем

$$(4)\qquad f^2(t)\frac{d}{dt}\left(f^2(t)\dot{\varphi}\right) + \omega_0^2 a(t) f^3(t)\sin\varphi = 0, \quad \omega_0 > 0: \quad \omega_0^2 = \frac{g_0}{\ell_0}.$$

Принимая во внимание естественное неравенство $\ell > 0$, введем новое время t' :

$$\frac{d}{dt'} = f^2(t)\frac{d}{dt}.$$

Имеет место следующее

Утверждение 1. *Если закон изменения длины маятника подобран таким образом, что*

$$(5)\qquad a(t)f^3(t) = \omega^2 > 0,$$

где $\omega > 0$ – постоянная, то уравнение (4) принимает вид

$$\frac{d^2\varphi}{dt'^2} + \omega^2\sin\varphi = 0.$$

Это уравнение описывает движение математического маятника.

Замечание 1. *Если условие (5) выполнено, то динамика системы описывается как функция времени t'. Чтобы представить решение как функцию исходного времени t, надо проинтегрировать дифференциальное уравнение*

$$(6)\qquad \frac{dt'}{dt} = f^{-2}(t).$$

Результирующая зависимость $t' = t'(t)$ в общем случае не может быть выражена в элементарных функциях. Кроме того, должно быть выполнено условие продолжимости решения на весь промежуток времени $t \in (-\infty, \infty.)$

Замечание 2. *Если $0 < c_\star < \dfrac{dt'}{dt} < c^\star$, то нижнее положение равновесия маятника $\varphi = 0$ устойчиво по Ляпунову, а верхнее положение $\varphi = \pi$ – неустойчиво вне зависимости от того, являются ли зависимости $a(t)$ и $f(t)$ периодическими или нет.*

Замечание 3. *Если выполнено условие (5), то сепаратрисы*

$$\frac{d\varphi}{dt'} \pm \omega \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) = 0$$

не расщеплены. Те же сепаратрисы в исходном времени имеют вид

$$f^2(t)\frac{d\varphi}{dt} \pm \omega \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) = 0.$$

Они также остаются нерасщепленными. (ср. [1]).

Замечание 4. *После того, как с помощью зависимости $t'(t)$ решения уравнения движения выписаны явно в исходном времени, управляющие воздействия – обобщенные силы F_ℓ и F_z, обеспечивающая такое движение, находятся из уравнений (2).*

2. Примеры

Пример 1. *Пусть длина маятника меняется так, что*

$$f(t) = \sqrt{1+\varepsilon\cos t} \quad \varepsilon = const: \quad 0 \leqslant \varepsilon < 1.$$

Тогда (см., например, [2], задача 2028):

$$t'(t) = \int\limits_0^t \frac{dx}{1+\varepsilon\cos x} = \frac{2}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} \operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}} \operatorname{tg}\left(\frac{t}{2}\right)\right).$$

В этом выражении функцию $\operatorname{arctg}(\cdot)$ надо воспринимать не в смысле главного значения, а как многозначную функцию. Из условия (5)

$$z = z(t): \quad a(t) = \frac{\omega^2}{\omega_0^2} f^{-3}(t) = \frac{\ell_0}{g}\frac{\omega_0^2}{(1+\varepsilon\cos t)^{3/2}}$$

Пример 2. *Пусть теперь длина маятника меняется так, что*

$$f(t) = \frac{1}{1+\varepsilon\cos t} \quad \varepsilon = const: \quad 0 \leqslant \varepsilon < 1.$$

Тогда

$$t'(t) = \int\limits_0^t (1+\varepsilon\cos x)^2 dx = (1+\frac{1}{2}\varepsilon^2)t + 2\varepsilon\sin t + \frac{1}{4}\varepsilon^2\sin 2t,$$

$$z = z(t): \quad a(t) = \frac{\ell_0}{g}\omega^2(1+\varepsilon\cos t)^3.$$

Замечание 5. *Рассматриваемые уравнения (1) при выполнении условия (5) сводятся к каноническим уравнениям Гамильтона с одной степенью свободы, для которых функция Гамильтона записывается как*

$$H(p,q,t) = f(t)\cdot H_\star(p,q), \quad f(t) > 0.$$

Происхождение замены времени в отвечающей такой функции Гамильтона системе уравнений Гамильтона

$$\frac{dq}{dt} = f(t)\frac{\partial H_\star}{\partial p}, \quad \frac{dp}{dt} = -f(t)\frac{\partial H_\star}{\partial q}$$

почти очевидно.

3. Исторические замечания

Существует множество публикаций, посвященных как движению маятника переменной длины, так и движению маятника с периодически колеблющейся точкой подвеса. Многие из этих публикаций вдохновлены феноменом стабилизации верхнего положения равновесия за счет высокочастотных колебаний точки подвеса.

Относительно краткий обзор [3], касающийся истории вопроса, очень удачно дополнен обзором [4]. В идейном плане к обсуждаемой тематике близки публикации [5–8], посвященные орбитальному движению гантелеобразных систем. Касаемо замен времени, то невозможно не упомянуть работы Бине, Леви-Чивита и Нехвилля [9–11], в которых было положено начало систематическому изучению введения нового времени в уравнения механики. Замена времени эффективно применяется при исследовании относительных движений небесных тел [12].

Список литературы

1. Burov A.A., Guerman A.D., Nikonov V.I. Asymptotic Invariant Surfaces for Non-Autonomous Pendulum-Type Systems // Regular and Chaotic Dynamics. 2020. Vol. 25, No. 1. P. 121–130.
2. Демидович Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу. М.: Из-во МГУ. 1997. 624 с.
3. Маркеев А.П. Об уравнениях приближенной теории движения твердого тела с вибрирующей точкой подвеса // Прикладная математика и механика. 2011. Т. 75. Вып. 2. С. 193–203.
4. Yakubu G., Olejnik P., Awrejcewicz J. On the Modeling and Simulation of Variable - Length Pendulum Systems: A Review // Archives of Computational Methods in Engineering. 2022. Vol. 29. P. 2397–2415.
5. Буров А.А. О колебаниях вибрирующей гантели на эллиптической орбите // Доклады Академии наук. 2011. Т. 437. Вып. 2. С. 186–189.
6. Буров А.А., Косенко И.И. О плоских колебаниях тела с переменным распределением масс на эллиптической орбите // Доклады Академии наук. 2011. Т. 440. № 6. С. 760–764.
7. Burov A., Kosenko I. On planar oscillations of a body with a variable mass distribution in an elliptic orbit // Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science. 2011. Vol. 225, No. 10. P. 2288–2295.
8. Burov A.A., Guerman A.D., Kosenko I.I. Tether orientation control for lunar elevator // Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy. 2014. Vol. 120. P. 337–347.
9. Binet M. Mémoire sur la variation des constantes arbitraires dans les formules géenéerales de la dynamique, et dans un systéme d'équations analogues plus étendues // Journal de l'Ecole Polytechnique. 1841. Vol. 17. P. 1–94.
10. Levi-Civita T. Sur la résolution qualitative du probléme restreinte de trois corps // Acta Mathematica. 1906. Vol. 30. P. 305–327.
11. Nechville V. Sur une nouvelle forme des équations différentielles du probléme restreint elliptique // CRAS. 1926. Vol. 182. P. 310–311.
12. Белецкий В.В. Движение искусственного спутника относительно центра масс. М.: Наука, 1965. 416 с.