УДК 531.36

О ГИРОСКОПИЧЕСКОЙ СТАБИЛИЗАЦИИ РАВНОВЕСИЙ ОДНОГО КЛАССА НЕЛИНЕЙНЫХ ПОТЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ

А.А. Косов

Институт динамики систем и теории управления им. В.М. Матросова СО РАН

Россия, 664033, Иркутск, ул. Лермонтова, 134

E-mail: kosov_idstu@mail.ru

Ключевые слова: нелинейная потенциальная система, устойчивость положения равновесия, гироскопическая стабилизация.

Аннотация: Рассматривается задача о гироскопической стабилизации нелинейных потенциальных систем с потенциалом специального вида. Получены условия стабилизации положения равновесия за счет присоединения гироскопических сил. Даны оценки снизу для больших параметров при матрицах гироскопических сил, гарантирующих устойчивость равновесия в замкнутой системе**.**

1. Введение

Задача о гироскопической стабилизации неустойчивого положения равновесия механической системы с потенциальными силами является давно известной классической проблемой, представляющей как теоретический, так и прикладной интерес. Теоретический интерес стимулируется тем фактом, что рассматриваемая система является консервативной и устойчивость равновесия при нелинейных потенциальных силах может быть достигнута только в заведомо критическом по Ляпунову случае, когда все корни характеристического уравнения системы линейного приближения лежат на мнимой оси. Прикладной интерес стимулируется тем, что управляющие гироскопические силы не совершают работы, поэтому стабилизация такими управлениями наиболее экономична по затратам энергии.

Для случая линейных систем условия, при которых гироскопическая стабилизация возможна, определяются теоремой Кельвина-Четаева [1]. Обзор наиболее изученного линейного случая с отрицательно определенной матрицей потенциальных сил приведен в [2]. Обычно рассматривают также случай, когда гироскопические силы содержат большой параметр, достаточные условия гироскопической стабилизации для такого случая приведены в [1]. Интерес представляет получение оценок большого параметра снизу, гарантирующих гироскопическую стабилизацию [3].

Для нелинейных потенциальных систем запрет на гироскопическую стабилизацию, формулируемый в терминах степени первой формы в разложении потенциала в ряд был получен в [4]. Обобщение теоремы Кельвина на случай нелинейных потенциальных систем было получено в [5], и нарушение ее условий необходимо для возможности гироскопической стабилизации.

В докладе будут представлены достаточные условия гироскопической стабилизации для нелинейных потенциальных систем с потенциалом специального вида. Указывается способ выбора управляющих гироскопических сил и даются оценки больших параметров снизу. Результаты иллюстрируются примерами.

2. Гироскопическая стабилизация положения равновесия потенциальных систем

2.1. Случай линейной системы

Рассмотрим уравнения движения механической системы с линейными потенциальными и гироскопическими силами

(1) $$\ddot{q} + hG\dot{q} + Cq = 0, \quad q, \dot{q} \in R^n, n = 2k, \quad G^T = -G, C^T = C, h > 0.$$

Теорема 1. *Пусть все собственные значения матрицы C кратные четной кратности, тогда существует невырожденная кососимметрическая матрица G такая, что матрица $G^T C$ будет кососимметрической, и при всех значениях параметра*

$$h^2 > h_0^2 = 4\frac{\lambda_{max}(C^T C)\lambda_{max}(G^T G)}{\lambda_{min}^2(G^T G)}$$

положение равновесия $q = \dot{q} = 0$ системы (1) *будет устойчиво по Ляпунову.*

Здесь и далее $\lambda_j(M)$ означают собственные числа соответствующей матрицы, а $\lambda_{min}(M)$ и $\lambda_{max}(M)$ наименьшее и наибольшее собственные числа симметричной матрицы.

Пример 1. Гироскопическая стабилизация в случае вырожденной матрицы потенциальных сил

$$C = \begin{pmatrix} -3/2 & 0 & 0 & 3/2 \\ 0 & -3/2 & -3/2 & 0 \\ 0 & -3/2 & -3/2 & 0 \\ 3/2 & 0 & 0 & -3/2 \end{pmatrix}, \lambda(C) = [-3, -3, 0, 0], \lambda(C^T C) = [0, 0, 9, 9],$$

$$G = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 3/2 & 0 \\ -1/2 & 0 & 0 & 3/2 \\ -3/2 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & -3/2 & -1/2 & 0 \end{pmatrix}, \lambda(G^T G) = [1, 1, 4, 4].$$

Произведение матриц кососимметрично

$$G^T C = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 3 \\ -3 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & -3 & -3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Теорема 1 гарантирует устойчивость при $h^2 > h_0^2 = 48$, на самом деле устойчивость будет уже при $h^2 > h_*^2 = 3$.

Теорема о достаточных условиях гироскопической стабилизации [1, с. 190] в этом примере неприменима из-за вырожденности матрицы C.

2.2. Нелинейные системы

Рассмотрим нелинейную механическую систему с потенциальными и гироскопическими силами, описываемую уравнениями Лагранжа

(2) $$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial T}{\partial q_k} + h_k G_k \dot{q}_k + C_k q_k + \frac{\partial f(q)}{\partial q_k} = 0, \quad k = 1, 2, \dots, m.$$

Здесь $q_k \in R^{n_k}$, $q = (q_1^T, q_2^T, \dots, q_m^T)^T \in R^n$, $n = n_1 + n_2 + \dots + n_m$ – отдельные выделенные векторные компоненты и полный вектор обобщенных координат системы; кинетическая энергия имеет вид

(3) $$T = T(q, \dot{q}) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m} \varphi_k(s_1, \dots, s_m)\|\dot{q}_k\|^2, s_k = \|q_k\|^2,$$

а все функции $\varphi_k(s_1, \dots, s_m)$ строго положительные и непрерывно дифференцируемые; потенциальная энергия имеет вид

(4) $\quad \Pi(q) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m} q_k^T C_k q_k + f(s_1, \dots, s_m, \sigma_1, \dots, \sigma_m), \sigma_k = q_k^T C_k q_k,$

где C_k – постоянные симметричные квадратные матрицы размера $n_k \times n_k$ с вещественными элементами, а $f(s_1, \dots, s_m, \sigma_1, \dots, \sigma_m)$ – некоторая непрерывно дифференцируемая функция своих аргументов, все частные производные которой как и сама функция обращаются в нули при обращении всех аргументов в ноль.

Постоянные кососимметрические матрицы G_k в системе (2) должны быть выбраны так, чтобы гарантировать устойчивость положения равновесия $q = \dot{q} = 0$.

Теорема 2. *Пусть все размерности n_k – четные, кинетическая и потенциальная энергия имеют соответственно вид* (3) *и* (4), *причем все матрицы C_k имеют только кратные собственные значения четной кратности.*

Тогда существуют кососимметрические невырожденные матрицы G_k такие, что произведение $G_k C_k$ будет кососимметрической матрицей, и при использовании таких матриц в качестве матриц G_k гироскопических сил в (2) *положение равновесия $q = \dot{q} = 0$ будет устойчиво по Ляпунову при*

$$h_k^2 > h_{k0} = 4\varphi_k(0)\frac{\lambda_{max}({G_k}^T G_k)}{\lambda_{min}^2({G_k}^T G_k)}\lambda_{max}^{1/2}({C_k}^T C_k).$$

Замечания. 1. Если при некотором k матрица C_k положительно определена, то можно положить соответствующую матрицу $G_k = 0$, т.е. гироскопические силы в данной подсистеме можно не применять. Размерность n_k при этом может быть и нечетной.

2. Если матрица C_k знакопостоянная положительная (в частности, нулевая) при некотором k, то соответствующее значение $h_{k0} = 0$, т.е. гироскопические силы в данной подсистеме можно брать как угодно малыми.

3. Утверждение теоремы 2 останется в силе, если функция $f(s_1, \dots, s_m, \sigma_1, \dots, \sigma_m)$ зависит еще и от аргументов вида $r_k = q_k^T L_k q_k$ где матрицы L_k обладают тем свойством, что $G_k L_k$ кососимметрична, например $L_k = G_k^T G_k$.

Пример 2. Рассмотрим нелинейную систему [5]

(5) $\quad \ddot{q} + G\dot{q} + \frac{\partial \Pi}{\partial q} = 0, \Pi(q) = (q_1^2 + q_2^2 + \dots + q_j^2)^p - (q_{j+1}^2 + q_{j+2}^2 + \dots + q_n^2)^p.$

Если j нечетно и $detG \neq 0$ (значит, n четно, и $n - j - 1$ – четно), то в соответствии с теоремой В.В.Козлова [5] положение равновесия $q = \dot{q} = 0$ системы (5) неустойчиво, т.е. гироскопическая стабилизация невозможна. Если j четно, то из теоремы 2 следует, что гироскопическая стабилизация положения равновесия системы (5) обеспечивается матрицей

$$G = \begin{pmatrix} G_1 & 0 \\ 0 & G_2 \end{pmatrix},$$

где G_1 – любая кососимметрическая $j \times j$ матрица, а G_2 – любая невырожденная кососимметрическая $(n - j) \times (n - j)$ матрица.

Список литературы

1. Меркин Д.Р. Гироскопические системы. М.: Наука, 1974. 344 с.
2. Bulatovic R.M. On Stability Criteria for Gyroscopic Systems with Negative Definite Stiffness // UNIVERSITY OF NIŠ**.** The scientific journal FACTA UNIVERSITATIS**.** *Series*: Mechanics, Automatic Control and Robotics. 2000. Vol. 2, No. 10. P. 1081 – 1087.
3. Карапетян А.В. К вопросу о гироскопической стабилизации // Teorijska i Primenjena Mehanika. 1994. Vol. 20. P. 89-93.

4. Болотин С.В., Негрини П. Асимптотические траектории гироскопических систем // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем. мех. 1993. № 6. С. 66-75.
5. Козлов В.В. Гироскопическая стабилизация вырожденных равновесий и топология вещественных алгебраических многообразий // ДАН. 2008. Т. 420, № 4. С. 447-450.