УДК 517.911.5

ФУНКЦИИ ЛЯПУНОВА ДЛЯ ПЕРИОДИЧЕСКИХ СЕЛЕКТОРНО-ЛИНЕЙНЫХ РАЗНОСТНЫХ ВКЛЮЧЕНИЙ

М.В. Морозов
Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН
Россия, 117997, Москва, Профсоюзная ул., 65
E-mail: granmiguel@mail.ru

Ключевые слова: периодические селекторно-линейные разностные включения, асимптотическая устойчивость, функции Ляпунова.

Аннотация: Для периодических селекторно-линейных разностных включений выделен класс периодических по времени функций Ляпунова квазиквадратичного вида, а также параметрические классы кусочно-квадратичных и кусочно-линейных функций Ляпунова, устанавливающих необходимые и достаточные условия асимптотической устойчивости. Полученные результаты могут найти применение при исследовании устойчивости систем управления с периодическими параметрами, в частности, следящих систем, элементы которых работают на переменном токе и систем управления с амплитудно-импульсной модуляцией.

1. Введение

Задача устойчивости периодических разностных включений возникает при изучении дискретных систем управления с периодическими параметрами и неопределенностью, в частности, следящих систем, которые работают на переменном токе, и систем с амплитудно-частотной модуляцией. В некоторых случаях, например, таких, как задача абсолютной устойчивости, исследование линейных нестационарных систем, матрица правой части которых удовлетворяет интервальным ограничениям могут быть использованы селекторно-линейные разностные включения. В [1] рассмотрены периодические разностные включения. Даны определения асимптотической, равномерной асимптотической и равномерной экспоненциальной устойчивости и доказана эквивалентность этих свойств для селекторно-линейных разностных включений. На основе вариационного подхода получено необходимое и достаточное условие равномерной асимптотической устойчивости в виде некоторого предельного соотношения. Данная работа посвящена получению критериев асимптотической устойчивости периодических селекторно-линейных разностных включений на основе метода функций Ляпунова.

2. Постановка задачи

Рассмотрим периодическое селекторно-линейное разностное включение вида

(1) $$x(s+1) \in F(s,x),\ s = 0,1,\ldots,\ x \in R^n,$$
$$F(s,x) = \{y: y = B(s)x, B(s) \in \Omega(s)\},$$

где $\Omega(s)(s = 1,2,\dots)$ – выпуклое, компактное множество действительных $(n \times n)$–матриц, $\Omega(s+N) = \Omega(s)$. Будем называть решением $x(s)$ включения (1) последовательность векторов $\{x(s)\}, s = 0,1,\dots$, удовлетворяющую при всех s включению (1). Последовательность $\{x(s)\}: x(s) = 0, k = 1,2,\dots$ является положением равновесия $x(s) \equiv 0$ включения (1). В силу периодичности по s многозначной функции $F(s,x)$ при исследовании свойств решений $x(s,s_0,x_0)$ включения (1) без ограничения общности можно считать, что $0 \le s_0 \le N$. Для включений (1) в [1] была доказана эквивалентность свойств асимптотической устойчивости, равномерной асимптотической устойчивости, равномерной экспоненциальной устойчивости. Учитывая это, для краткости, везде далее будем говорить об асимптотической устойчивости включения (1).

Задача состоит в выделении параметрических классов функций Ляпунова, устанавливающих необходимые и достаточные условия асимптотической устойчивости включения (1), и в построении критериев устойчивости включения (1) с использованием дискретного аналога прямого метода Ляпунова.

3. Основные результаты

Теорема 1. *Для асимптотической устойчивости включения (1) необходимо и достаточно, чтобы существовала периодическая по* s *(с периодом* N*) функция Ляпунова* $v(s,x)$ *квазиквадратичного вида*

(2)
$$v(s,x) = x'L(s,x)x, L(s,x) = (l_{ij}(s,x))_{i,j=1}^{n},$$
$$L'(s,x) = L(s,x) = L(s,\mu x), x \ne 0, \mu \ne 0, v(s,0) \equiv 0,$$
$$L(s+N,x) = L(s,x),$$

однородная (второй степени), строго выпуклая по $x \in R^n$ *при каждом* $s \ge 0$ *и удовлетворяющая неравенству*

(3)
$$\max_{y \in F(s,x)} v(s,y) \le \theta v(s,x), \ x \in R^n, \ s = 0,1,\dots$$

при некотором $\theta (0 < \theta < 1)$.

Функция Ляпунова вида (2) не является параметрической. В следующих теоремах выделены параметрические классы кусочно-квадратичных и кусочно-линейных функций Ляпунова, устанавливающих необходимые и достаточные условия асимптотической устойчивости включения (1).

Теорема 2. *Включение (1) асимптотически устойчиво тогда и только тогда, когда при некотором целом* $M \ge n$ *существует периодическая по* s *(периода* N*), кусочно-квадратичная функция Ляпунова*

(4)
$$v_M(s,x) = \max_{1 \le j \le M} \langle l^j(s), x\rangle^2, (l^j(s+N) = l^j(s),$$

для которой неравенство вида (3) выполняется при всех $s \ge 0$ *и* $x \in R^n$*, а* n*–мерные периодические векторы* $(l^j(s)(l^j(s+N) = l^j(s)), j = \overline{1,M}$ *удовлетворяют условию*

(5)
$$rank L(s) = n \le M, L(s) = (l^1(s),\dots,l^M(s)), s = 0,1,\dots$$

(т.е. периодическая $(n \times M)$*–матрица* $L(s)$ $(L(s+N) = L(s)$ *имеет при всех* $s \ge 0$ *максимальный ранг).*

От кусочно-квадратичных функций (4) можно перейти к кусочно-линейным функциям Ляпунова

(6)
$$V_M(s,x) = \max_{1 \le j \le M} \left|\langle l^j(s), x\rangle\right|.$$

Следствием теоремы 2 является

Теорема 3. *Для того, чтобы включение (1) было асимптотически устойчиво, необходимо и достаточно, чтобы при некотором целом* $M \ge n$ *существовала* *периодическая по s (периода N), кусочно-линейная функция Ляпунова $V_M(s,x)$ вида (6), удовлетворяющая условию (5) и неравенству вида (3) при всех $x \in R^n$, $s \geq 0$.*

4. Заключение

Для селекторно-линейного периодического разностного включения (1) с помощью квазиквадратичных, кусочно-квадратичных и кусочно-линейных функций Ляпунова получены критерии асимптотической устойчивости. Полученные результаты могут найти применение при исследовании устойчивости систем управления с периодическими параметрами, в частности, следящих систем, элементы которых работают на переменном токе и систем управления с амплитудно-импульсной модуляцией. Выделенные в теоремах 2, 3 кусочно-квадратичные и кусочно-линейные функции Ляпунова вида (4), (6), устанавливающие необходимые и достаточные условия асимптотической устойчивости включения (1), могут быть использованы при разработке численных методов исследования устойчивости систем, эквивалентных разностному включению (1).

Список литературы

1. Morozov M.V. On the Stability of Periodic Difference Inclusions // Advances in Systems Science and Applications. 2022. Vol. 22, No. 1. P. 167-175.
2. Морозов М.В. Критерий асимптотической устойчивости периодического селекторно-линейного дифференциального включения // Автоматика и телемеханика. 2021. № 1. С. 83-94.
3. Халанай А., Векслер Д. Качественная теория импульсных систем. М.: Мир, 1971. 309 с.
4. Рокафеллар Р.Т. Выпуклый анализ. М.: Мир, 1973. 469 с.
5. Благодатских В.И., Филиппов А.Ф. Дифференциальные включения и оптимальное управление // Труды МИАН СССР. 1985. Том 169. С. 194-252.
6. Малкин И.Г. Теория устойчивости движения. М.: Наука, 1966. 530 с.