

УДК 62.50, 519.688

# ОЦЕНКА ОБЛАСТИ ПРИТЯЖЕНИЯ С ПОМОЩЬЮ МЕТОДА ОБРАТНОГО ИНТЕГРИРОВАНИЯ

**Ю.В. Морозов**

*Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН*  
Россия, 117997, Москва, Профсоюзная ул., 65  
E-mail: tot1983@ipu.ru

**А.В. Пестерев**

*Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН*  
Россия, 117997, Москва, Профсоюзная ул., 65  
E-mail: alexanderpesterev.ap@gmail.com

**Ключевые слова:** область притяжения, интегрирование в обратном времени, выпуклая оболочка, маятник Капицы.

**Аннотация:** Представлен метод построения областей притяжения в виде выпуклых оболочек асимптотически устойчивых положений равновесия динамических систем. Основой предлагаемого подхода является использование интегрирования в обратном времени траекторий системы с последующей процедурой овыпукления полученных множеств. Предлагаемый метод гарантирует максимально возможную выпуклую аппроксимацию области притяжения для заданной погрешности. Метод применим к многомерным системам как с непрерывным временем, так и с дискретным временем. Предложенный метод может быть использован как для автономных систем, так и для систем с периодическими малыми коэффициентами. Для демонстрации его эффективности рассматривается построение области притяжения нулевого решения уравнения, описывающего движение маятника Капицы под воздействием вертикальной вибрации с малой амплитудой. Результаты работы алгоритма для разных значений погрешности приведены в сравнении с “точной” областью притяжения для данного примера.

## 1. Постановка задачи

В задачах стабилизации нелинейных систем важной характеристикой построенного закона управления является величина области притяжения состояния равновесия. Поэтому, разработка любого закона управления должна сопровождаться как можно более точной оценкой области притяжения. Очень часто, синтезировав стабилизирующую обратную связь, авторы ограничиваются построением эллипсоидальной оценки области притяжения линеаризованной в окрестности равновесия системы. Такая оценка, как правило, весьма консервативна и плохо аппроксимирует действительную область притяжения. Для построения

более точной аппроксимации области притяжения в большинстве случаев использовались два различных подхода: в одном оценка области притяжения строится с помощью полиномиальных функций Ляпунова [1–3], другой основан на интегрировании системы в обратном времени [4–6]. Предлагаемый в настоящей статье метод относится ко второй группе, более точно, это модификация алгоритма, разработанного в [6] и модифицированного в [4]. В данной работе предлагается, алгоритм, позволяющий оценивать меру невыпуклости (погрешность овыпукления) построенной оценки области притяжения и сравнивать ее с заданной. Т.о. в рамках данного подхода, допускается присутствие ограниченного числа точек, полученных с помощью метода интегрирования в обратном времени, внутри выпуклой оболочки, если расстояние до границы множества меньше заданной погрешности.

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$(1) \quad \dot{x} = f(x), \quad f(0) = 0,$$

где  $x \in R^n$  и  $f : D \subset R^n \rightarrow R^n$  – отображение из  $D \subset R^n$  в  $R^n$ , удовлетворяющее условиям существования и единственности решения (1) с начальными условиями  $x(0) \in D$ , и пусть начало координат – изолированное асимптотически устойчивое состояние равновесия. Обозначим через  $\mathcal{A} \subset D$  область притяжения точки  $x = 0$ . Пусть далее известна некоторая оценка области притяжения  $P^0(\mathcal{A}) \subset \mathcal{A}$ . Справедлива следующая теорема.

**Теорема 1.** [6] *Область притяжения  $\mathcal{A}$  асимптотически устойчивого положения равновесия системы (1) может быть сколь угодно хорошо аппроксимирована сходящейся последовательностью односвязных областей  $P^i(\mathcal{A}) \subset P^{i+1}(\mathcal{A})$ ,  $i = 1, \dots, \infty$ , полученных из начальной области  $P^0(\mathcal{A})$  интегрированием системы (1) в обратном времени.*

Так как на практике невозможно получить решение для каждой точки границы, обратное интегрирование выполняется для конечного числа  $N$  равномерно распределенных точек границы; т.е. граница области заменяется ее кусочно-линейной аппроксимацией. Решив  $N$  задач Коши на заданном интервале времени, получим новый набор из  $N$  точек, кусочно-линейная аппроксимация которых служит границей новой оценки области притяжения. Хотя полученная таким образом оценка хорошо аппроксимирует границу области притяжения, использование такого метода на практике весьма затруднительно, так как в настоящее время не существует эффективных методов, позволяющих проверить принадлежность точки невыпуклому множеству. Для решения этой проблемы в работе [4] предложено использовать выпуклые оболочки.

**Определение 1.** [7] *Выпуклая оболочка множества точек  $S_N = \{x_1, x_2, \dots, x_N\}$  в  $R^n$ , обозначаемое  $\mathcal{C}(S_N)$ , является наименьшим выпуклым множеством, содержащим все точки. Выпуклая оболочка может быть математически представлена набором линейных уравнений и неравенств.*

Идея в том, чтобы на каждом шаге аппроксимировать текущую оценку области притяжения выпуклым множеством, что позволяет легко проверять принадлежность любой точки построенному множеству. Таким образом, вместо последовательности  $P^i(\mathcal{A}) \subset P^{i+1}(\mathcal{A})$ ,  $i = 1, \dots, \infty$ , в работе [4] используется последовательность выпуклых оболочек  $P^i(\mathcal{A}) \subset \mathcal{C}(P^i(\mathcal{A})) \subset \mathcal{C}(P^{i+1}(\mathcal{A}))$ , натянутых на дискретное множество точек, полученных из точек лежащих на границе предыдущей оценки обратным интегрированием системы. Причем, алгоритм останавливается, если хотя

бы одна новая точка, полученная интегрированием в обратном времени, лежит внутри выпуклой оболочки; что приводит к достаточно консервативной оценке области притяжения, но уже в виде выпуклой оболочки.

## 2. Алгоритм оценки области притяжения

Основная идея предлагаемого алгоритма заключается в том, что после построения выпуклой оболочки, по точкам, полученным при обратном интегрировании системы, внутри нее могут находиться точки, но достаточно близко от границы выпуклой оболочки. Для оценки наихудшего расстояния для всех внутренних точек используется специальный алгоритм [8]. Решения об остановке алгоритма или его дальнейшего продолжения принимается из сравнения этого расстояния с заданным. Фактически, предлагается на каждом шаге алгоритма иметь оценку насколько выпуклая оболочка  $\mathcal{C}(P^i(\mathcal{A}))$  отличается от линейной аппроксимации области  $P^i(\mathcal{A})$ .

### Алгоритм 1.

**ИНИЦИАЛИЗАЦИЯ:** В качестве области  $P^0(\mathcal{A})$  возьмем эллипсоид:  $P^0(\mathcal{A}) = \{x \in \mathbb{R}^n : V(x) = x^T P x \leq r\}$ , где  $V(x)$  – функция Ляпунова линеаризованной системы (1), матрица  $P > 0$  – решение задачи:  $\max_P \text{tr}(P)$ ,  $PA + A^T P < 0$ ,  $A = \partial f(x)/\partial x|_{x=0}$  – матрица Якоби системы, а  $r$  выбирается так, чтобы  $P^0(\mathcal{A}) \supset \mathcal{A}$ . Дискретизируем границу области  $P^0(\mathcal{A})$  с помощью  $N$  равномерно распределенных точек так, чтобы расстояние между соседними точками удовлетворяло условию  $\|x_i - x_{i+1}\| < \varepsilon$ ,  $i = 0, \dots, N - 1$ .

Выберем шаг интегрирования  $h$  и минимальный интервал интегрирования  $\Delta T$ . Обозначим через  $T_1 = 0$  интервал времени когда, оценка области притяжения выпуклая и  $T_2 = 0$  когда невыпуклая.

1. Выберем интервал интегрирования  $T$  и интегрируем систему (1) в обратном времени до  $t = T$  для всех точек  $S_N^0$ .
2. Строим выпуклую оболочку  $\mathcal{C}(S_N^T)$  множества точек  $S_N^T$ .
3. Проверяем, есть ли точки внутри оболочки. Пусть внутри  $M$ , обозначим их через  $\{x_1, x_2, \dots, x_M\}$ . Для каждой такой точки вычисляем расстояние  $D = \max_{j \in M} \{d_j\}$ , где  $d_j$  – минимальное расстояние от точки  $x_j$  до границы  $\mathcal{C}(S_N^T)$ .
  - Если  $M = 0$  или  $D < \varepsilon$  заменяем  $P^0(\mathcal{A}) = \mathcal{C}(S_N^{T_1})$  и фиксируем интервал интегрирования  $T_1 = T$ . Повторяем ШАГИ 1-2 со значением  $T > T_1$ .
  - Если  $D > \varepsilon$  – область притяжения невыпуклая. Фиксируем интервал интегрирования  $T_2 = T$ .
    - Если  $T_2 - T_1 > \Delta T$  то повторяем шаги ШАГИ 1-2 с значением  $T$ :  $T_1 < T < T_2$ .
    - В противном случае алгоритм останавливается со значением интегрирования  $T_1^*$ .

РЕЗУЛЬТАТОМ работы алгоритма является область  $\mathcal{C}(S_N^{T_1^*}) \supset P^0(\mathcal{A})$ .

### 3. Численный пример

Обозначим через  $\phi(t)$ ,  $x_1(t)$  – углы отклонения маятника Капицы от вертикального положения. Пусть угол  $x_1(t)$  соответствует "медленному" движению, а угол  $\phi(t)$  определяет общее движение маятника. Тогда из [9, 10] следует, что общее решение уравнения движения маятника Капицы под действием вертикальной гармонической силы, приложенной к основанию маятника, определяется в виде:  $\phi(t) = x_1(t) + k_2 \sin(x_1(t)) \cos \omega t = x_1(t) + \varepsilon \sin(x_1(t)) \cos \omega t$ , где решение  $x_1(t)$  удовлетворяет следующей нелинейной системе 2-го порядка:

$$(2) \quad \dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = \left( k_1 - \frac{k_2}{2} \cos(x_1) \right) \sin(x_1) - 2\gamma x_2,$$

где  $k_1 = (\omega_0/\omega)^2$ ,  $k_2 = (a/L)^2$ . Здесь  $L$  – длина подвеса,  $a$  – амплитуда силы,  $\omega$  – частота колебаний,  $\gamma$  это постоянная затухания, с помощью которой учитывается момент силы трения,  $g$  – ускорение свободного падения,  $\omega_0 = \sqrt{g/L}$  – частота собственных колебаний. Система (2), записанная в виде дифференциального уравнения 2-го порядка носит название уравнение Матье [10]. Из анализа устойчивости следуют ограничения на выбор параметров в виде неравенства  $k_2 > 2k_1$ .

Аналитическая оценка области притяжения нулевого решения системы (2) получена в [10] в виде:  $P^0 = \{(x_1, x_2) : x_2 > 0, \cos(x_1) \leq \frac{2k_1}{k_2}\}$ . Кроме того, в обоих работах [9, 10] показано, что для достаточно малого  $\varepsilon$  эта же область будет областью притяжения и для общего решения  $\phi(t)$ .

В численном примере использовались следующие значения параметров:  $L = 1.0$ ,  $a = 0.5$ ,  $\omega = 1000$ ,  $\gamma = 0.001$ . Значения параметров подобраны так, чтобы система была устойчивой при  $\gamma = 0$  согласно [10]. Важно отметить, что существенное увеличение значения этого параметра может привести к отсутствию устойчивости в системе, что подтверждается на практике.

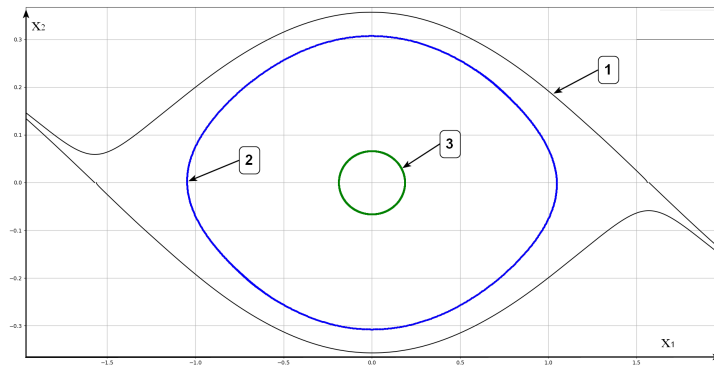


Рис. 1. 1 – «точная» область притяжения, 2 –  $\mathcal{C}(S_N^{T_1^*})$ , 3 –  $P^0(\mathcal{A})$

Область  $\mathcal{C}(S_N^{T_1^*})$ , полученная в результате работы алгоритма, начальный эллипс  $P^0(\mathcal{A})$ , а также «точная» область притяжения изображены на рис. 1. Общее число точек  $N = 1200$ , полный интервал времени интегрирования  $T_1^* = 1600$ , число точек внутри выпуклой оболочки  $M = 199$ . Оценка погрешности составляет  $2.2 \cdot 10^{-5}$ . Дальнейшее увеличение интервала времени приводит к росту числа точек внутри выпуклой оболочки и росту ошибки овыпукления.

Важно отметить, что построенная точная область притяжения, позволяет утверждать, что стабилизация маятника Капицы возможна и из отрицательных положений (ось проходит ниже горизонтальной плоскости) при условии, если мы сообщаем начальную скорость в правильном направлении.

## 4. Заключение

В работе предложен алгоритм, позволяющий аппроксимировать область притяжения устойчивого равновесия динамической системы в виде максимальной выпуклой оболочки. В основе предложенного алгоритма, лежит метод интегрирования траекторий в обратном времени. Для старта алгоритма необходима оценка области притяжения в виде выпуклого множества, обычно достаточно эллипсоида. Особенность предложенного алгоритма заключается в том, что на каждом шаге его работы и имеется оценка области притяжения в виде выпуклой оболочки, граница которой строится с заданной погрешностью. Алгоритм является довольно общим и применим к системам с более высокой размерностью. Для демонстрации его эффективности была построена выпуклая оценка не выпуклой области притяжения в задаче управления маятником Капицы с помощью вертикальных вибраций высокой частоты, но малой амплитуды.

## Список литературы

1. Морозов Ю.В. Оценка области притяжения с помощью функций Ляпунова из класса форм высших степеней в задаче управления мобильным роботом. Материалы докладов IX конференции молодых ученых «Навигация и управление движением». СПб.: ГНЦ РФ ЦНИИ «Электроприбор», 2007. С. 358–364.
2. Seiler P., Balas G. J. Quasiconvex sum-of-squares programming // Proceedings of 49th IEEE Conference on Decision and Control (CDC). Atlanta, USA, 2010. P. 3337–3342.
3. Vannelli A., Vidyasagar M. Maximal lyapunov functions and domains of attraction for autonomous nonlinear systems // Automatica. 1985. Vol. 21, No. 1. P. 69–80.
4. Kant N., Chowdhury D., Mukherjee R. and Khalil H. K. An algorithm for enlarging the region of attraction using trajectory reversing // American Control Conference (ACC). Seattle, USA, 2017. P. 4171–4176.
5. Genesio R., Vicino A. New techniques for constructing asymptotic stability regions for nonlinear systems // IEEE Transactions on Circuits and Systems. 1984. Vol. CS-31, No. 6. P. 574–581.
6. Guttalu R. S., Flashner H. A numerical method for computing domains of attraction for dynamical systems // Inter. Journal for Numerical Methods in Engineering. 1988. Vol. 26, No. 4. P. 875–890.
7. Barber C. B., Dobkin D. P., Huhdanpaa H. The quickhull algorithm for convex hulls // ACM Transactions on Mathematical Software (TOMS). 1996. Vol. 22, No. 4. P. 469–483.
8. Leng Q., Wang S., Qin Y., Li Y. An effective method to determine whether a point is within a convex hull and its generalized convex polyhedron classifier // Information Sciences. 2012. Vol. 504 P. 435–448.
9. Буланчук П.О., Петров А.Г. Вибрационная энергия и управление маятниковыми системами // Прикладная математика и механика. 2012. Т. 76, № 4. С. 550–562.
10. Бутиков Е. И. Стабилизация перевернутого маятника (60 лет маятнику Капицы) // КИО. 2010. № 5. <https://clck.ru/36rhEv> (дата обращения: 31.10.2023).