УДК 519.7

ОБОБЩЕННАЯ $\mathcal{H}_2$-НОРМА ЛИНЕЙНЫХ НЕПРЕРЫВНЫХ СИСТЕМ С МАРКОВСКИМИ ПЕРЕКЛЮЧЕНИЯМИ

Р.С. Бирюков
Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского
Россия, 603022, Нижний Новгород, Гагарина пр., 23
E-mail: ruslan.biryukov@itmm.unn.ru

Е.С. Бубнова
Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского
Россия, 603022, Нижний Новгород, Гагарина пр., 23
E-mail: bubnova@itmm.unn.ru

Ключевые слова: обобщенная $\mathcal{H}_2$-норма, LMI, марковские процессы.

Аннотация: Для линейной непрерывной нестационарной системы с марковскими переключениями вводится понятие обобщенной $\mathcal{H}_2$-нормы как максимального значения максимального по времени математического ожидания квадрата евклидовой нормы выхода при условии, что сумма квадрата энергии внешнего возмущения и квадратичной формы начального состояния системы равна единице. Обобщенная $\mathcal{H}_2$-норма характеризуется как в терминах системы матричных дифференциальных уравнений Риккати, так и в терминах линейных матричных неравенств. Показано, что задача синтеза оптимальных управлений в классе линейных нестационарных обратных связей по состоянию, при которых обобщенная $\mathcal{H}_2$-норма замкнутой системы принимает минимальное значение, сводится к решению задачи полуопределенного программирования.

1. Введение

В современных задачах управления широкое распространение получили системы со случайной структурой, в частности системы с марковскими переключениями (markovian jump systems) [1]. Такие системы имеют конечное число различных режимов функционирования, в каждом из которых динамика описывается своей системой дифференциальных уравнений. Между режимами в случайные моменты времени происходят скачкообразные переходы, определяемые эволюцией однородной марковской цепи (марковские переключения). Простейшие задачи, приводящие к системам со случайной структурой, это задачи управления с нарушениями и отказами [2], задачи синхронизации в сетях переменной топологии [3, 4], задачи многоагентного управления [5, 6] и др.

В действительности реальные объекты функционируют в неопределенной среде, то есть подвергаются воздействиям различных, часто неизвестных, внешних возмущений, что может приводить к отклонению значений целевых переменных объектов от номинальных значений. Одна из основных целей управления заключается в минимизации этих отклонений независимо от начальных условий и внешних воздействий. Последнее означает, что для оценки качества функционирования системы можно использовать обобщенную $\mathcal{H}_2$-норму (energy-to-peak norm), впервые введенную Уилсоном для непрерывных систем в работе [7]. Данная норма представляет собой максимальное значение максимальной по времени евклидовой нормы выхода при условии, что энергия внешнего возмущения равна единице, то есть это L_∞/L_2 норма оператора, порожденного рассматриваемой системой. Другой отличительной особенностью обобщенной $\mathcal{H}_2$-нормы, если сравнивать ее с $\mathcal{H}_\infty$- и анизотропийной нормами, является простота ее вычисления. Кроме этого, в [8, 9] было показано, что задачи многокритериального управления, когда в качестве целевых функционалов выступают обобщенные $\mathcal{H}_2$-нормы, могут быть эффективно решены с использованием аппарата линейных матричных неравенств. В настоящей работе сделана попытка перенести понятие обобщенной $\mathcal{H}_2$-нормы на системы со случайной структурой, а также решена задача синтеза обобщенного $\mathcal{H}_2$-управления.

2. Постановка задачи

Рассмотрим непрерывную линейную управляемую систему со случайной структурой, меняющейся в соответствии с эволюцией стационарной марковской цепи

$$
\begin{aligned}
&\dot{x} = A_{\theta(t)}(t)x + B_{\theta(t)}(t)v + B^u_{\theta(t)}(t)u, \qquad x(t_s) = x_0,\\
&z = C_{\theta(t)}(t)x + D_{\theta(t)}(t)u,
\end{aligned} \tag{1}
$$

здесь $x \in \mathbb{R}^{n_x}$ – состояние объекта, $v(t) \in L_2([t_s,\, t_f], \mathbb{R}^{n_v})$ – внешнее возмущение, $u(t)$ – управление, $z \in \mathbb{R}^{n_z}$ – целевой выход, $\theta(t)$ – марковский процесс непрерывного времени, принимающий дискретные состояния из множества $\mathcal{S} = \{1, 2, \ldots, S\}$ с вероятностью перехода

$$
\mathsf{P}\{\theta(t+\Delta t) = j | \theta(t) = i\} = \begin{cases} \lambda_{ij}\Delta t + o(\Delta t), & i \neq j,\\ 1 + \lambda_{ij}\Delta t + o(\Delta t), & i = j,\end{cases}
$$

где $\mathsf{P}\{\theta(t+\Delta t) = j | \theta(t) = i\}$ – вероятность того, что система, находящаяся в момент времени t в состоянии i, за время Δt перейдет из него в состояние j. Будем считать марковский процесс однородным, т.е. λ_{ij} не зависят от времени. Матрица интенсивностей переходов $\Lambda = (\lambda_{ij})$ обладает следующими свойствами

$$
\lambda_{ij} > 0, \quad i \neq j; \qquad \lambda_{ii} = -\sum_{j \in \mathcal{S}} \lambda_{ij}.
$$

и связана с матрицей вероятностей переходов соотношением

$$
P(\tau) = (\mathsf{P}\{\theta(t+\tau) = j | \theta(t) = i\}) = e^{\Lambda\tau}.
$$

Начальное состояние марковского процесса θ_0 – случайная величина с законом распределения $\mathsf{P}\{\theta_0 = j\} = \pi_j$, $j \in \mathcal{S}$.

Отметим, что уравнение (4) и матрица $P(t)$ задают марковский процесс $(x(t), \theta(t))$ в пространстве $\mathbb{R}^n \times \mathcal{S}$.

Поставим задачу синтеза управления в виде линейной обратной связи по состоянию системы с учетом состояния марковской цепи:

$$u(t) = \Theta_{\theta(t)}(t)x(t), \tag{2}$$

минимизирующего значение γ, для которого выполняется соотношение

$$\sup_{t\in[t_s,t_f]} \mathbb{E}\big\{|z(t)|_2^2\big\} \leqslant \gamma^2\big\{\|v\|_{L_2}^2 + x_0^\top R x_0\big\}, \tag{3}$$

где $R = R^\top \succ 0$ – весовая матрица. Наименьшее значение γ, при котором верно (3) назовем обобщенной $\mathcal{H}_2$-нормой системы (1).

3. Синтез обобщенного $\mathcal{H}_2$-управления

Рассмотрим вычисление обобщенной $\mathcal{H}_2$-нормы системы (1) без управления:

$$\begin{aligned} &\dot{x} = A_{\theta(t)}(t)x + B_{\theta(t)}(t)v, \qquad x(t_s) = x_0, \quad \theta(t_s) = \theta_0,\\ &z = C_{\theta(t)}(t)x, \end{aligned} \tag{4}$$

Теорема 1. *Обобщенная $\mathcal{H}_2$-норма системы* (4) *может быть вычислена как решение следующей задачи полуопределенного программирования*

$$\begin{aligned} &\inf \gamma^2\\ &\dot{X}_l(t) + X_l(t)A_l(t) + A_l^\top(t)X_l(t) + X_l(t)B_l(t)B_l^\top(t)X_l(t) + \sum_{j\in\mathcal{S}} \lambda_{lj}X_j(t) = 0,\\ &\sum_{j\in\mathcal{S}} \pi_j X_j(t) - R \preccurlyeq 0, \quad t\in[t_s,t_f], \qquad \begin{bmatrix} X_l(t_f) & C_l^\top(t_f)\\ C_l(t_f) & \gamma^2 I\end{bmatrix} \succcurlyeq 0, \quad l\in\mathcal{S}. \end{aligned} \tag{5}$$

Переформулируем теорему 1 в терминах дифференциальных LMIs, что будет удобно в дальнейшем при решении задачи синтеза.

Следствие 1. *Обобщенная $\mathcal{H}_2$-норма системы* (4) *может быть вычислена как решение следующей задачи полуопределенного программирования*

$$\begin{aligned} &\begin{bmatrix} -\dot{Y}_l(t) + A_l(t)Y_l(t) + Y_l(t)A_l^\top(t) + B_l(t)B_l^\top(t) + \lambda_{ll}Y_l(t) & V_l(t)\\ V_l^\top(t) & -W_l(t)\end{bmatrix} \preccurlyeq 0,\\ &\begin{bmatrix} R & \sqrt{\pi_1}Y_1(t) & \dots & \sqrt{\pi_S}Y_S(t)\\ \sqrt{\pi_1}Y_1(t) & Y_1(t) & \dots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \sqrt{\pi_S}Y_S(t) & 0 & \dots & Y_S(t)\end{bmatrix} \succcurlyeq 0, \qquad t\in[t_s,t_f],\\ &\begin{bmatrix} Y_l(t_f) & Y_l(t_f)C_l^\top(t_f)\\ C_l(t_f)Y_l(t_f) & \gamma^2 I\end{bmatrix} \succcurlyeq 0, \qquad l\in\mathcal{S}, \end{aligned} \tag{6}$$

где

$$\begin{aligned} &V_l(t) = \left[\sqrt{\lambda_{l1}}Y_l(t) \quad \dots \quad \sqrt{\lambda_{l,l-1}}Y_l(t) \quad \sqrt{\lambda_{l,l+1}}Y_l(t) \quad \dots \quad \sqrt{\lambda_{l,S}}Y_l(t)\right],\\ &W_l(t) = \mathrm{diag}(Y_1(t), \dots, Y_{l-1}(t), Y_{l+1}(t), \dots, Y_S(t)). \end{aligned} \tag{7}$$

Заметим, что переход от системы (5) к (6) осуществляется стандартным образом: после замены $Y_l(t) = X_l^{-1}(t)$ первое уравнение (5) умножается на $Y_l(t)$ слева и справа, а второе условие умножается слева и справа на $\operatorname{diag}(Y_l, I)$, после чего использование леммы о дополнении Шура приводит к выражениям (6).

Система (1), замкнутая регулятором (2), имеет вид

$$\begin{aligned}\dot{x} &= (A_{\theta(t)}(t) + B^u_{\theta(t)}(t)\Theta_{\theta(t)}(t))x + B_{\theta(t)}(t)v, \qquad x(t_s) = x_0,\\ z &= (C_{\theta(t)}(t) + D_{\theta(t)}(t)\Theta_{\theta(t)}(t))x.\end{aligned} \tag{8}$$

Подставим матрицы замкнутой системы в (6) и сделаем замены $\Theta_l(t)Y_l(t) = Z_l(t)$, чтобы неравенства стали линейными. Второе неравенство системы условий (6) не изменится, а первое и последнее неравенства примут вид

$$\begin{aligned}&\begin{bmatrix}-\dot{Y}_l + A_lY_l + Y_lA_l^\top + B_l^uZ_l + Z_lB_l^{u\top} + B_lB_l^\top + \lambda_{ll}Y_l & V_l\\ V_l^\top & -W_l\end{bmatrix} \preccurlyeq 0, \qquad t \in [t_s, t_f],\\ &\begin{bmatrix}Y_l(t_f) & Y_l(t_f)C_l^\top(t_f) + Z_l^\top(t_f)D_l^\top(t_f)\\ C_l(t_f)Y_l(t_f) + D_l(t_f)Z_l(t_f) & \gamma^2 I\end{bmatrix} \succcurlyeq 0, \qquad l \in \mathcal{S}.\end{aligned} \tag{9}$$

Для краткости в первом неравенстве у матричных функций опущен аргумент t.

Для вычисления искомых параметров обратной связи можно провести дискретизацию условий (9), тогда синтез управления сводится к решению серии LMIs.

4. Результаты численного моделирования

В качестве иллюстрации полученных результатов рассмотрим на временном промежутке [0, 5] систему (1), матрицы которой имеют вид

$$A_1 = \begin{bmatrix}1.5 & 1.0\\ 0.0 & -1.5\end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix}-1.5 & 0.0\\ 1.0 & 1.5\end{bmatrix}, \quad B_1 = B_1^u = \begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}, \quad B_2 = B_2^u = \begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}, \tag{10}$$

$C_1 = C_2 = I_2$, $D_1 = D_2 = 0$. Выберем параметры марковского процесса, а также

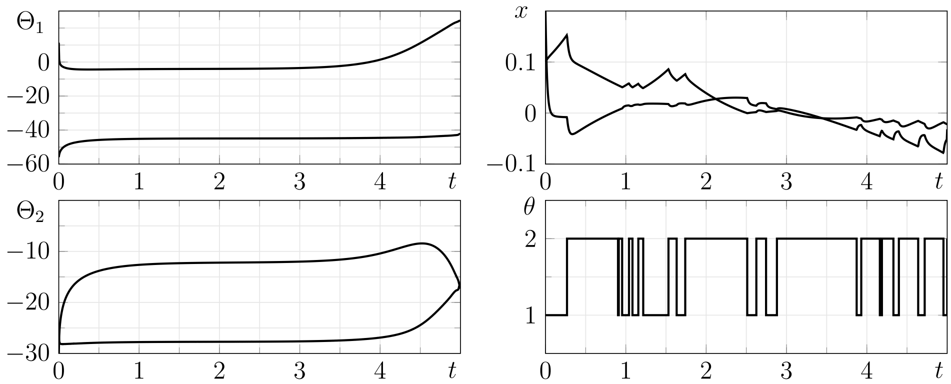

Рис. 1. Графики зависимостей от времени оптимальных коэффициентов матриц обратных связей, переходных процессов и состояний марковской цепи

весовую матрицу следующим образом:

$$\Lambda = \begin{bmatrix}-10 & 10\\ 5 & -5\end{bmatrix}, \qquad \pi = \begin{bmatrix}\pi_1\\ \pi_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0.25\\ 0.75\end{bmatrix}, \qquad R = \begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{bmatrix}.$$

В результате решения системы (6) с шагом дискретизации 0.005 получено значение обобщенной $\mathcal{H}_2$-нормы системы без управления $\gamma = 82.4$. Далее построено обобщенное $\mathcal{H}_2$-управление, при котором значение нормы данной системы $\gamma = 1.0$.

Для численного моделирования системы выбраны начальные условия $x_0 = [0.1,\, 0.2]^\top$ и внешнее возмущение $v = e^{0.1t}\sin t$. Графики зависимостей от времени оптимальных коэффициентов матриц обратных связей $\Theta_1(t)$ и $\Theta_2(t)$, переходных процессов $x(t)$ и состояний марковской цепи $\theta(t)$ представлены на рис. 1.

5. Заключение

Для линейных систем со случайной структурой на конечном горизонте вводится понятие обобщенной $\mathcal{H}_2$-нормы и приводится алгоритм ее вычисления, основанный на решении системы матричных дифференциальных уравнений Риккати. Построено оптимальное обобщенное $\mathcal{H}_2$-управление в виде нестационарной линейной обратной связи по состоянию системы с учетом смены структуры. Показано, что матрицы обратной связи могут быть найдены как решение задачи полуопределенного программирования.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования РФ (проект FSWR-2023-0034) и научно-образовательного математического центра «Математика технологий будущего».

Список литературы

1. Fragoso M.D., Hemerly E.M. Optimal control for a class of noisy linear systems with markovian jumping parameters and quadratic cost // International Journal of Systems Science. 1991, Vol. 22, No. 12. P. 2553-2561.
2. Stoica A.-M., Stoicu S.C. H_∞ State-Feedback Control of Multi-Agent Systems with Data Packet Dropout in the Communication Channels: A Markovian Approach // Entropy. 2022. Vol. 24, No. 12. P. 1734.
3. Xiaowu Mu, Baojie Zheng, Kai Liu. $L_2 - L_\infty$ containment control of multi-agent systems with Markovian switching topologies and non-uniform time-varying delays // IET Control Theory & Applications. 2014. Vol. 8, No. 10. P. 863-872.
4. Yan Z, Sang C, Fang M, Zhou J. Energy-to-peak consensus for multi-agent systems with stochastic disturbances and Markovian switching topologies // Transactions of the Institute of Measurement and Control. 2018. Vol. 40, No. 16. P. 4358-4368.
5. Abdollahi F., Khorasani K. A Decentralized Markovian Jump H_∞ Control Routing Strategy for Mobile Multi-Agent Networked Systems // IEEE Transactions on Control Systems Technology. 2011. Vol. CST-19, No. 2. P. 269-283.
6. Wan H., Luan X., Karimi H.R., Liu F. Dynamic Self-Triggered Controller Codesign for Markov Jump Systems // IEEE Transactions on Automatic Control. 2021. Vol. AC-66, No. 3. P. 1353-1360.
7. Wilson D. A. Convolution and Hankel Operator Norms for Linear Systems // IEEE Transactions on Automatic Control. 1989. Vol. AC-34. P. 94–97.
8. Баландин Д.В., Коган М.М. Оптимальное по Парето обобщенное $\mathcal{H}_2$-управление и задачи виброзащиты // Автоматика и телемеханика. 2017. № 8. С. 76–90.
9. Баландин Д.В., Бирюков Р.С., Коган М.М. Оптимальное управление максимальными уклонениями выходов линейной нестационарной системы // Автоматика и телемеханика. 2019. № 10. С. 37–61.