

УДК 62.50

# СКРЫТЫЕ КОЛЕБАНИЯ В ЗАДАЧЕ СТАБИЛИЗАЦИИ ЦЕПОЧКИ ИНТЕГРАТОРОВ

**А.В. Пестерев***Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН*

Россия, 117997, Москва, Профсоюзная ул., 65

E-mail: alexanderpesterev.ap@gmail.com

**Ю.В. Морозов***Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН*

Россия, 117997, Москва, Профсоюзная ул., 65

E-mail: tot1983@ipu.ru

**Ключевые слова:** стабилизация цепочки интеграторов, скрытые аттракторы, вложенные сатураторы, глобальная устойчивость.

**Аннотация:** Рассматривается задача стабилизации цепочки трех интеграторов с помощью кусочно-непрерывной обратной связи специального вида в виде вложенных сатураторов. Для замкнутой системы, представляющей собой линейную аффинную систему с переключениями, ставится задача определения коэффициентов обратной связи, при которых она глобально устойчива. Установлено, что потеря устойчивости обусловлена возникновением в системе периодических движений, так называемых скрытых колебаний. Исследуется структура множества скрытых аттракторов и предлагается численный метод их построения.

## 1. Введение

Задача стабилизации цепочек интеграторов широко обсуждалась в литературе в течение последних десятилетий (см., например, [1, 2] и приведенные там ссылки). Интерес к данной проблематике обусловлен тем, что во многих приложениях исходные модели заданы в виде цепочек интеграторов; более того, управления, разработанные для цепочек интеграторов, легко обобщаются на более широкие классы систем. В настоящей работе предлагается стабилизировать цепочку трех интеграторов с помощью кусочно-непрерывной обратной связи в виде вложенных сатураторов. Обсуждение преимуществ таких обратных связей, позволяющих в ряде случаев не только добиться глобальной устойчивости, но и обеспечить выполнение заданных свойств переходного процесса к состоянию равновесия, можно найти во многих публикациях (см., например, [1, 3, 4] и приведенные там ссылки).

В 2009 г. Г.А. Леоновым и Н.В. Кузнецовым была предложена новая классификация аттракторов динамических систем, ставшая основой теории *скрытых колебаний* (см. обзор [5] и приведенные там ссылки). Согласно этой классификации,

аттрактор называется *скрытым*, если область его притяжения не соприкасается с неустойчивыми состояниями равновесия, в противном случае аттрактор называется *самовозбуждающимся* [5]. В то время как самовозбуждающиеся аттракторы могут быть легко обнаружены и визуализированы траекториями в численных экспериментах с начальными данными из окрестностей неустойчивых состояний равновесия, скрытые аттракторы не связаны с состояниями равновесия и их области притяжения “скрыты” в фазовом пространстве системы. Поэтому численный поиск скрытых аттракторов и определение начальных данных для их визуализации в общем случае весьма нетривиальная задача [5].

## 2. Постановка задачи

Рассматривается задача стабилизации цепочки трех интеграторов

$$(1) \quad \dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = x_3, \quad \dot{x}_3 = U(x), \quad x \equiv [x_1, x_2, x_3]^T,$$

с помощью кусочно-непрерывного ограниченного управления. В качестве стабилизирующей предлагается обратная связь в виде вложенных сатураторов:

$$(2) \quad U(x) = -\text{sat}_{k_6} \left( k_5(x_3 - U_1(x_1, x_2)) - \dot{U}_1 \right), \quad k_5, k_6 > 0,$$

$$(3) \quad U_1(x_1, x_2) = -\text{sat}_{k_4} (k_3(x_2 + k_2 \text{sat}_1(k_1 x_1))), \quad k_1, k_2, k_3, k_4 > 0,$$

где  $\text{sat}_d(w)$  – негладкая функция насыщения,  $\text{sat}_d(w) = w$ , когда  $|w| \leq d$ , и  $\text{sat}_d(w) = d \text{sign}(w)$  при  $|w| > d$ , а  $\dot{U}_1$  – производная  $U_1$  в силу системы (1).

Правая часть (3) задает разбиение фазовой плоскости  $(x_1, x_2)$  на множества  $D_1$ ,  $D_2 = D_2^- \cup D_2^+$  и  $D_3 = D_3^- \cup D_3^+$ , показанные на рис. 1, в которых кусочно-линейные функции  $U_1$  и  $\dot{U}_1$  принимают различный вид (более подробно, см. [4]). Множеству  $D_1$  принадлежат все точки, в которых оба сатуратора не насыщены;  $D_2$  включает точки, в которых насыщен внутренний сатуратор; а  $D_3$ , все точки, в которых достигается насыщения внешний сатуратор. Как и  $D_2$ ,  $D_3$  состоит из двух непересекающихся множеств  $D_3^-$  и  $D_3^+$ , лежащих выше и ниже линии  $x_2 = -\text{sat}(k_1 x_1)$  (сплошная ломаная линия на рис. 1), в которых  $U_1(x) \equiv -k_4$  и  $U_1(x) \equiv +k_4$  соответственно.

В [4] доказано, что положение равновесия интегратора 2-го порядка, замкнутого обратной связью (3), глобально устойчиво. Также показано, что система может быть приведена к безразмерному виду с единичными коэффициентами  $k_2$  и  $k_4$  в правой части (3). Таким образом, в безразмерном виде система (1), (2) полностью описывается четырьмя коэффициентами. Далее, количество коэффициентов без потери общности может быть уменьшено до двух, если ограничиться выбором  $k_1$ ,  $k_3$  и  $k_5$  из однопараметрического семейства

$$(4) \quad k_1 = \lambda/2, \quad k_3 = 2\lambda, \quad k_5 = \lambda, \quad \lambda > 0,$$

параметризованного экспоненциальной скоростью убывания отклонения  $\lambda$ . При таком выборе коэффициентов система (1), (2) в окрестности нуля принимает вид

$$(5) \quad \dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = x_3, \quad \dot{x}_3 = -3\lambda x_3 - 3\lambda^2 x_2 - \lambda^3 x_1.$$

Характеристическое уравнение системы очевидно имеет трехкратный корень  $(-\lambda)$ . Так как  $\lambda$  определяет скорость сходимости к положению равновесия, возникает задача нахождения наибольшего  $\lambda$ , при котором система глобально устойчива.

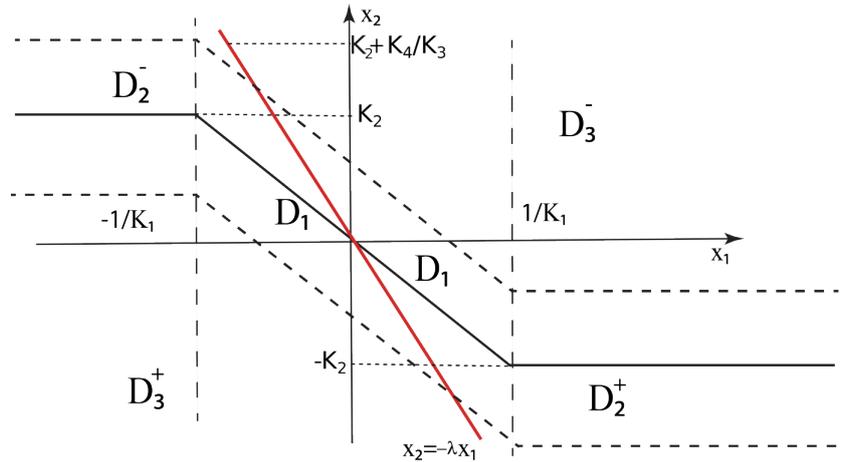


Рис. 1. Разбиение плоскости  $(x_1, x_2)$  на множества  $D_1, D_2$  и  $D_3$

### 3. Скрытые колебания

Численное моделирование показало, что потеря устойчивости в системе (1), (2) связана с появлением периодических решений, возникающих, когда  $\lambda$  превышает некоторое пороговое значение, при этом начало координат остается устойчивым положением равновесия. Колебания такого рода согласно классификации, предложенной Г.А. Леоновым, называются *скрытыми аттракторами* [5].

Докажем, что в рассматриваемой системе существуют скрытые колебания, и найдем минимальное значение  $\lambda$ , при котором они возникают. Траектории периодических движений будем для краткости называть *циклами* а траекторию при минимальном значении  $\lambda_{min}(k_6)$ , *минимальным циклом*. Будем предполагать, что (1) проекция цикла на плоскость  $(x_1, x_2)$  – гладкая кривая без самопересечений; (2) на любом сегменте цикла, проекция которого лежит в  $D_1$  или  $D_2$ , управление насыщено; и (3) цикл симметричен относительно начала координат.

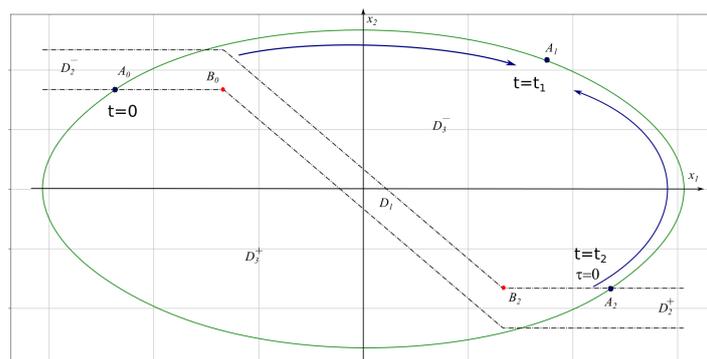


Рис. 2. Проекция периодического решения системы (1), (2) на плоскость  $(x_1, x_2)$

Обозначим через  $A_0$  и  $A_2$  точки на плоскости  $(x_1, x_2)$ , в которых проекция цикла пересекает нижнюю и верхнюю границы множества  $D_1 \cup D_2$ , соответственно (пунктирные линии на рис. 2), а через  $A_1$ , точку, в которой происходит переключение с насыщенного на ненасыщенное управление. Моменты времени, когда проекция

цикла проходит через точки  $A_0$ ,  $A_1$  и  $A_2$  обозначим  $t_0 = 0$ ,  $t_1$  и  $t_2$ , соответственно. Согласно предположению о симметрии, вторая половина цикла (от  $A_2$  до  $A_0$ ) симметрична относительно начала координат. Согласно второму предположению, на участке  $(A_0, A_1)$  система движется с насыщенным управлением  $U(x) \equiv -k_6$ .

На интервале  $[0, t_1]$ ,  $U(x) \equiv -k_6$  и система (1), (2) принимает вид

$$(6) \quad \dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = x_3, \quad \dot{x}_3 = -k_6.$$

Интегрируя систему (6), получим

$$(7) \quad x_3(t) = -k_6 t + x_3(0),$$

$$(8) \quad x_2(t) = -\frac{k_6 t^2}{2} + x_3(0)t + x_2(0),$$

$$(9) \quad x_1(t) = -\frac{k_6 t^3}{6} + x_3(0)\frac{t^2}{2} + x_2(0)t + x_1(0).$$

На интервале  $[t_1, t_2]$ ,  $U_1(x_1, x_2) = -1$ , и система (1), (2) имеет вид

$$(10) \quad \dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = x_3, \quad \dot{x}_3 = \lambda(x_3 + 1).$$

Интегрируя (10) в обратном времени  $\tau = t_2 - t$  с учетом симметрии получим

$$(11) \quad x_3(\tau) = \varepsilon e^{\lambda\tau} - 1,$$

$$(12) \quad x_2(\tau) = -\frac{\varepsilon}{\lambda}(e^{\lambda\tau} - 1) + \tau - x_2(0),$$

$$(13) \quad x_1(\tau) = \frac{\varepsilon}{\lambda^2}(e^{\lambda\tau} - 1) - \frac{\tau^2}{2} + \left(x_2(0) - \frac{\varepsilon}{\lambda}\right)\tau - x_1(0),$$

где  $\varepsilon = 1 - x_3(0) > 0$ .

Условие насыщения  $\lambda(x_3(t_2 - t_1) + 1) = k_6$  в точке  $A_1$  дает уравнение

$$(14) \quad \varepsilon e^{\lambda\theta} = k_6 \mu,$$

где  $\theta = t_2 - t_1$  и  $\mu = 1/\lambda$ . Подставляя  $\tau = \theta$  в уравнениях (11)–(13), а также правую часть уравнения (14) вместо  $\varepsilon e^{\lambda\theta}$ , избавляемся от экспонент в уравнениях (11)–(13). Условия сшивки двух решений в точке  $A_1$  дают три алгебраических уравнения

$$(15) \quad \begin{aligned} k_6 \mu^3 + \frac{k_6 t_1^3}{6} - \varepsilon \mu^2 - \varepsilon \mu \theta - (1 - \varepsilon) \frac{t_1^2}{2} - \frac{\theta^2}{2} + (\theta - t_1) x_2(0) - 2x_1(0) &= 0, \\ k_6 \mu^2 - \varepsilon \mu - \frac{k_6 t_1^2}{2} + (1 - \varepsilon) t_1 - \theta + 2x_2(0) &= 0, \\ k_6 \mu + \varepsilon + k_6 t_1 - 2 &= 0, \end{aligned}$$

которые вместе с (14) составляют систему четырех уравнений относительно пяти неизвестных  $\mu$ ,  $x_2(0)$ ,  $\varepsilon$ ,  $t_1$ , и  $\theta$  ( $x_1(0)$  определяется из уравнения границы области  $D_3$ ). Легко видеть, что физический смысл имеют только *положительные* решения, т.е. решения, все компоненты которых положительны.

Выясним, существует ли периодическое решение, проекция которого на плоскость  $(x_1, x_2)$  проходит через угловые точки границы  $B_0$  и  $B_2$ . Подставляя  $x_1(0) = -2\mu$  и  $x_2(0) = 1 - \mu/2$  в уравнения (15), получим систему четырех уравнений относительно четырех неизвестных  $\mu$ ,  $\varepsilon$ ,  $t_1$ , и  $\theta$ , которая, как оказалось, имеет единственное положительное решение при любых значениях  $k_6$ . В частности, при  $k_6 = 1$ ,  $\mu^* = 0.540$  ( $\lambda^* = 1.852$ ),  $\varepsilon^* = 0.010$ ,  $t_1^* = 1.449$ ,  $\theta^* = 2.130$ . На рис. 3 показан соответствующий цикл, построенный по формулам (7)–(9) и (11)–(13). Численные эксперименты показали, что при фиксированном  $\lambda(\mu)$  система (14),

(15) относительно переменных  $\varepsilon, t_1, x_2(0)$  и  $\theta$  имеет положительные решения только при  $\lambda > \lambda^*$ , откуда следует, что  $\lambda^* = \lambda_{min}$ , т.е. построенный выше цикл является минимальным. При этом компонента  $x_1(0)$  (единственного) решения при  $\lambda > \lambda_{min}$  удовлетворяет условию  $x_1(0) < -2\mu$ , т.е. начальная точка  $A_0$  лежит на границе между  $D_3^+$  и  $D_2^-$  (как на рис. 2). Указанное решение определяет симметричное

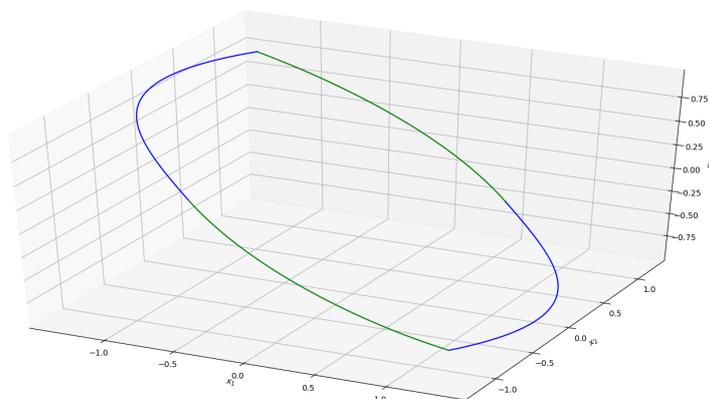


Рис. 3. Минимальный цикл

относительно начала координат периодическое решение  $\tilde{x}_1(t), \tilde{x}_2(t), \tilde{x}_3(t)$  замкнутой системы, проходящее через точку  $\tilde{x}_1(0) = x_1(0), \tilde{x}_2(0) = 1 - \mu/2, \tilde{x}_3(0) = 1 - \varepsilon$ .

Откажемся теперь от требования симметричности цикла. Легко видеть, что тройка функций  $\tilde{x}_1(t) + \Delta, \tilde{x}_2(t), \tilde{x}_3(t)$ , где  $|\Delta| \leq |A_0 - B_0| = |x_1(0) + 2/\lambda|$  также удовлетворяет уравнениям (6) и (10), и является периодическим решением исходной системы (1), (2). т.е. наряду с симметричным существует множество циклов, полученных из него сдвигом вдоль оси  $x_1$  на величину  $\Delta$ . Таким образом, при  $\lambda > \lambda_{min}$  существует несчетное множество скрытых колебаний, траектории которых плотно покрывают поверхность цилиндра с образующей длины  $|2x_{10} + 4/\lambda|$ .

## Список литературы

1. Teel A.R. Global Stabilization and Restricted Tracking for Multiple Integrators with Bounded Controls // Sys. & Cont. Lett. 1992. Vol. 18. No. 3. P. 165–171.
2. Kurzhanski A.B., Varaiya P. Solution Examples on Ellipsoidal Methods: Computation in High Dimensions. Cham, Switzerland: Springer, 2014.
3. Pesterev A.V., Morozov Yu.V. Optimizing coefficients of a controller in the point stabilization problem for a robot-wheel // Lect. Notes Comput. Sci. 2021. Vol. 13078. P. 191–202.
4. Пестреву А.В. Global Stability of a Second-order Affine Switching System // Automation and Remote Control. 2023. Vol. 84, No. 9. P. 1085–1093.
5. Kuznetsov N.V. Theory of hidden oscillations and stability of control systems Journal of Computer and Systems Sciences International. 2020. Vol. 59. P. 647–668.