УДК 519.711.7

ДЕСИНХРОНИЗАЦИЯ В СЕТЯХ ИЗ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

С.А. Плотников
Институт проблем машиноведения РАН[1]
Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского[2]
[1]Россия, 199178, Санкт-Петербург, Большой пр. ВО., 61
[2]Россия, 603022, Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23
E-mail: waterwalf@gmail.com

Ключевые слова: нелинейные системы управления, сетевые модели, десинхронизация, колебательность, функции Ляпунова.

Аннотация: В данной работе вводятся определения полной и частичной десинхронизации для сети из нелинейных систем. Рассматривается определение колебательной системы и устанавливается связь между этим определением и определением десинхронизации. Десинхронизацию можно понимать как колебательность системы из ошибок синхронизации при достаточно большой амплитуде колебаний ее решения. Приводится теорема, позволяющая установить колебательность нелинейной системы, а также получить оценку на амплитуду колебаний ее решения. На основе этой теоремы выводится теорема, устанавливающая наличие десинхронизации в сети из нелинейных систем, а также дающая оценку на амплитуду колебаний ошибок синхронизации.

1. Введение

В последнее время большое внимание специалистов в различных областях науки и техники привлекают задачи о исследовании динамики сложных сетевых систем [1]. С помощью динамических сетей описываются многие природные явления и технические решения, в частности, движение роя насекомых, стаи птиц [2, 3], динамика нейронов в головном мозге [4], ансамбли связанных осцилляторов [5] и группы мобильных роботов [6]. Центральным понятием в теории динамических сетей является синхронизация – совпадение или сближение переменных состояния двух или нескольких систем, или согласованное изменение некоторых их количественных характеристик [7]. Задачу синхронизацию удобно свести к задаче стабилизируемости системы из ошибок синхронизации [8], для решения которой используется широкий круг методов в теории управления и динамических систем. Помимо синхронизации сети из динамических систем могут пребывать в состояниях кластерной синхронизации [1], Химеры [9], десинхронизации [10] и др.

В этой работе исследуется явление десинхронизации в сложных динамических сетях. Задачу десинхронизации, как и задачу синхронизации, удобно свести к исследованию динамики системы из ошибок синхронизации. Для этого нужно ввести подходящее определение. Определение частотной десинхронизации было дано в работе [10], тогда как определение координатной десинхронизации – в работах [11, 12]. Под десинхронизацией можно понимать колебательность решения системы из ошибок синхронизации. Причем амплитуда этих колебаний должна быть достаточно велика, иначе это явление будет называться ε-синхронизацией. В данной работе предлагается подход, позволяющий установить, находится ли рассматриваемая сеть в состоянии десинхронизации, а так же найти оценку на амплитуду колебаний решения системы из ошибок синхронизации.

2. Предварительные сведения

Напомним определения колебательных функций и систем, введенные В.А. Якубовичем [13].

Определение 1. *Для α, $\beta \in \mathbb{R}$, $\alpha < \beta$ скалярная функция $\psi(t)$ называется (α, β)-колебательной при $t \to \infty$, если она ограничена, и выполнены следующие неравенства:*

$$\varliminf_{t\to+\infty} \psi(t) = \alpha; \quad \varlimsup_{t\to+\infty} \psi(t) = \beta.$$

Рассмотрим нелинейную систему

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}), \tag{1}$$

где $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ – вектор состояния; $\mathbf{f}$ – непрерывная, локально липшицева вектор-функция.

Определение 2. *Решение $\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0)$ для $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ системы* (1) *называется колебательным, если для него существует выход $\psi = \eta(\mathbf{x})$, где $\eta : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ – непрерывная функция, такой, что он является (α, β)-колебательным для некоторых $-\infty < \alpha < \beta < +\infty$.*

Система (1) *называется колебательной, если для почти всех $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ решения системы $\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0)$ колебательные.*

Условия существования колебаний в системе (1) сформулированы в следующей теореме [14].

Теорема 1. *Пусть существуют две непрерывные и локально липшецевы функции Ляпунова $V_1 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$, $V_2 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$, удовлетворяющие неравенствам*

$$v_1(|\mathbf{x}|) \leqslant V_1(\mathbf{x}) \leqslant v_2(|\mathbf{x}|), \quad v_3(|\mathbf{x}|) \leqslant V_2(\mathbf{x}) \leqslant v_4(|\mathbf{x}|),$$

для всех $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $v_1, v_2, v_3, v_4 \in K_\infty$, а их производные в силу системы (1) *удовлетворяют следующим неравенствам*

$$\dot{V}_1(\mathbf{x}) = \frac{\partial V_1}{\partial \mathbf{x}}\mathbf{f}(\mathbf{x}) > 0, \quad \text{для } 0 < |\mathbf{x}| < X_1,\ \mathbf{x} \notin \Xi,$$
$$\dot{V}_2(\mathbf{x}) = \frac{\partial V_2}{\partial \mathbf{x}}\mathbf{f}(\mathbf{x}) < 0, \quad \text{для } |\mathbf{x}| > X_2,\ \mathbf{x} \notin \Xi,$$

где $0 < X_1 < v_1^{-1} \circ v_2 \circ v_3^{-1} \circ v_4(X_2) < +\infty$ и $\Xi \subset \mathbb{R}^n$ – некоторое множество нулевой меры, не содержащее целых траекторий системы. Если, к тому же, пересечение двух следующих множество пусто

$$\{\mathbf{x} : v_2^{-1} \circ v_1(X_1) < |\mathbf{x}| < v_3^{-1} \circ v_4(X_2)\} \cap \Xi = \varnothing,$$

то система (1) является колебательной, при этом для ее решения $\mathbf{x}(t)$ *верны следующие оценки*

$$|\mathbf{x}(t)| > \ v_2^{-1} \circ v_1(X_1), \quad |\mathbf{x}(t)| < v_3^{-1} \circ v_4(X_2).$$

Напомним, что непрерывная функция $\sigma \ : \ \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ принадлежит классу K, если она строго возрастающая и $\sigma(0) = 0$; она принадлежит классу K_∞, если она принадлежит классу K и радиально неограничена.

3. Основной результат

Рассмотрим сеть из N связанных систем

$$\dot{\mathbf{x}}_i = \mathbf{f}_i(\mathbf{x}_i) + \mathbf{g}_i(\mathbf{x}_i, \mathbf{u}_i), \tag{2}$$

где $\mathbf{x}_i \in \mathbb{R}^n$ – векторы состояния каждой системы, которые образуют вектор состояния всей сети $\mathbf{x} = (\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_N)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^{Nn}$, а $\mathbf{u}_i \in \mathbb{R}^m$ – векторы входа каждой системы, используемые для описания связей между системами с помощью вектор-функций $\mathbf{h}_i$: $\mathbf{u}_i = \mathbf{h}_i(\mathbf{x})$. Предположим, что граф рассматриваемой сети является ориентированным и связным. Введем взвешенное среднее состояний систем:

$$\bar{\mathbf{x}} = \sum_{i=1}^{N} \nu_i \mathbf{x}_i, \quad \sum_{i=1}^{N} \nu_i = 1, \tag{3}$$

тогда с его помощью можно ввести векторы ошибок синхронизации:

$$\mathbf{e}_i = \mathbf{x}_i - \bar{\mathbf{x}}, \quad i = 1, \ldots, N, \tag{4}$$

образующие вектор ошибок синхронизации всей сети $\mathbf{e} = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_N)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^{Nn}$. Теперь можно выписать уравнение системы из ошибок синхронизации, используя исходную сеть (2) и выражения (3), (4):

$$\dot{\mathbf{e}} = \mathbf{f}_e(\mathbf{x}). \tag{5}$$

Здесь $\mathbf{f}_e$ – вектор-функция, описывающая динамику системы из ошибок синхронизации. Полученная система может быть и не замкнута относительно $\mathbf{e}$ из-за наличия нелинейностей.

Теперь введем определение десинхронизации.

Определение 3. *Сеть из* N *объектов будем называть частично десинхронизированной, если существуют достаточно большие* $\Delta_i > 0$ *для некоторых* $i = 1, \ldots, N$ *такие, что выполнены неравенства*

$$|\mathbf{e}_i(t)| \geqslant \Delta_i, \quad \forall t \in \mathbb{R}. \tag{6}$$

Если неравенства (6) *выполнены для всех* $i = 1, \ldots, N$*, то сеть называется полностью десинхронизированной.*

Отметим, что так же были попытки ввести определения десинхронизации в работах [11, 12], но они имеют свои недостатки.

Введенное определение позволяет свести задачу десинхронизации сети к задаче исследования колебательности системы из ошибок синхронизации. Для ее решения, в свою очередь, можно воспользоваться Теоремой 1. Заметим, что в Теореме 1 функция Ляпунова $V_2(\mathbf{x})$ используется для доказательства ограниченности решения $\mathbf{x}(t, \mathbf{x_0})$ и поиска оценки ограниченности. По введенному определению десинхронизации оценка ограниченности решения не требуется, поэтому в Теореме 1 вместо предположения о существовании функции Ляпунова $V_2(\mathbf{x})$ можно требовать ограниченность решения $\mathbf{x}(t, \mathbf{x_0})$ для почти всех $\mathbf{x}_0$. Тогда имеет место следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть граф сети* (2) *является ориентированным и связным, а ее решения* $\mathbf{x}(t, \mathbf{x_0})$ *являются ограниченными для почти всех* $\mathbf{x}_0$. *Пусть существует непрерывная и локально липшецева функция Ляпунова* $V : \mathbb{R}^{Nn} \to \mathbb{R}_+$, *удовлетворяющая неравенствам*

$$v_1(|\mathbf{e}|) \leqslant V(\mathbf{e}) \leqslant v_2(|\mathbf{e}|),$$

для всех $\mathbf{e} \in \mathbb{R}^{Nn}$, $v_1, v_2 \in K_\infty$, *а ее производная в силу системы из ошибок синхронизации* (5) *удовлетворяет следующим неравенствам*

$$\dot{V}(\mathbf{e}) = \frac{\partial V}{\partial \mathbf{e}} \mathbf{f}_e(\mathbf{x}) > 0, \quad \text{для } 0 < |\mathbf{e}| < E,\ \mathbf{e} \notin \Xi,$$

где $E > 0$ *и* $\Xi \subset \mathbb{R}^n$ *– некоторое множество нулевой меры, не содержащее целых траекторий системы. Если, к тому же, пересечение двух следующих множество пусто*

$$\{\mathbf{e} \ : \ v_2^{-1} \circ v_1(E) < |\mathbf{e}|\} \cap \Xi = \varnothing,$$

то сеть (2) *является полностью десинхронизированной при* $\Delta > v_2^{-1} \circ v_1(E)$.

4. Заключение

В работе было предложено определение частичной и полной десинхронизации сети из нелинейных систем, а также была показана взаимосвязь между понятиями десинхронизации и колебательности. На основе теоремы о колебательности нелинейной системы и получении оценок на амплитуду колебаний ее решения была предложена теорема, устанавливающая факт пребывания сети из нелинейных систем в состоянии десинхронизации. Данная теорема может применяться к различным примерам сетей из нелинейных систем.

Исследование выполнено в национальном исследовательском Нижегородском государственном университете им. Н.И. Лобачевского при поддержке Российского научного фонда (грант №19-72-10128).

Список литературы

1. Pecora L.M., Sorrentino F., Hagerstrom A.M., Murphy T.E., Roy R. Cluster synchronization and isolated desynchronization in complex networks with symmetries // Nat. Commun. 2014. Vol. 5. P. 4079.
2. Herbert-Read J.E. Understanding how animal groups achieve coordinated movement // J. Exp. Biol. 2016. Vol. 219, No. 19. P. 2971–2983.
3. Sumpter D.J. Collective Animal Behavior. Princeton: Princeton University Press. 2010.

4. Deco G., Jirsa V.K., Robinson P.A., Breakspear M., Friston K. The dynamic brain: From spiking neurons to neural masses and cortical fields // PLOS Computat. Biol. 2008. Vol. 4, No. 8. P. e1000092.
5. Strogatz S.H., Stewart I. Coupled oscillators and biological synchronization // Sci. Am. 1993. Vol. 269, No. 6. P. 102–109.
6. Bullo F., Cortez J., Martinez S. Distributed Control of Robotic Networks. Princeton: Princeton Univ. Press. 2009. 314 p.
7. Фрадков А. Л. Кибернетическая физика: Принципы и примеры. С.Пб.: Наука. 2003. С. 208.
8. Panteley E., Loría A. Synchronization and dynamic consensus of heterogeneous networked systems // IEEE Trans. Automat. Control. 2017. Vol. AC-62, No. 8. P. 3758–3773.
9. Schöll E. Synchronization patterns and chimera states in complex networks: Interplay of topology and dynamics // Eur. Phys. J. Spec. Top. 2016. Vol. 225. P. 891–919.
10. Franci A., Panteley E., Chaillet A., Lamnabhi-Lagarrigue F. Desynchronization of coupled phase oscillators, with application to the Kuramoto system under mean-field feedback // 50th IEEE Conf. on Decis. Cont. & Europ. Cont. Conf. 2011. P. 6748–6753.
11. Plotnikov S.A., Fradkov A.L. Desynchronization in oscillatory networks based on Yakubovich oscillatority // IFAC-PapersOnLine. 2020. Vol. 53, No. 2. P. 1037–1042.
12. Плотников С. А. Десинхронизация и колебательность в возбудимых сетях ФитцХью-Нагумо // Мехатроника, автоматизация, управление. 2023. Т. 24, № 6. С. 292–299.
13. Якубович В.А. Частотные условия автоколебаний в нелинейных системах с одной стационарной нелинейностью // Сиб. мат. журн. 1973. Т. 14, № 5. С. 1100–1129.
14. Ефимов Д.В., Фрадков А.Л. Условия колебательности по Якубовичу для нелинейных систем // Вестник СПбГУ. 2006. Т. 1, № 4. С. 28–40.