УДК 51-77

ОЦЕНКА ЗНАЧЕНИЙ ОСОБЫХ ТОЧЕК И ИХ УСТОЙЧИВОСТИ ДЛЯ ДВУМЕРНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ С УЧЕТОМ ВЛИЯНИЯ ПРЕДЫСТОРИИ

Ю.А. Полунин
Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН
Россия, 117997, Москва, Профсоюзная ул., 65
E-mail: yplnn@yandex.ru

Ключевые слова: нелинейный процесс, влияние предыстории, особые точки, устойчивость, потенциал роста.

Аннотация: В докладе рассматривается процесс изменения размеров системы, описываемый в виде нелинейного отображения, учитывающего влияние на изменение размеров системы исходного ресурса развития, текущего состояния и предыстории. Влияние предыстории описывается в виде лагового значения процесса с постоянным коэффициентом. Для такого отображения оценены значения особых (неподвижных) точек и границы их устойчивости в осях значений параметров роста и коэффициента влияния предыстории. Для наглядного представления о границах устойчивости и значениях особых точек приведены графики, позволяющие визуально определять границы устойчивости и значения потенциалов роста системы. Рассмотрены несколько вариантов компромиссов между потенциалом развития системы и устойчивостью, их надо учитывать при анализе процесса и разработке стратегии развития системы.

1. Введение

В задачах управления эволюции систем необходимо иметь представление о характере и особенностях динамики ее размеров. Закономерности эволюции размеров систем можно описать, как процесс изменения текущего размера системы при котором каждый элемент системы изменяется в размере, используя с некой интенсивностью свободные на данный момент ресурсы. Такой тип эволюции свойственен социально-экономическим, биологическим и техническим системам.

2. Модель процесса изменения размеров системы в виде нелинейного отображения с учетом влияния предыстории

2.1. Определение значений особых (неподвижных) точек.

Значение свободных на данный момент ресурсов можно представить как исходный ресурс в момент начала эволюции R минус ресурс уже израсходованный на эволюцию системы до текущего размера X_n, плюс влияние предыстории на изменение ресурса. Обобщенно влияние предыстории можно представить как лаговое значение процесса X_{n-1}, взятое с поправочным коэффициентом γ. В этом случае изменение размеров системы можно представить в виде нелинейного процесса, следующее значение которого X_{n+1} можно выразить в виде отображения:

(1) $$X_{n+1} = X_n + X_n\, Q\, (R - X_n + \gamma X_{n-1}),$$

где: X_n – значение процесса (размер системы) в дискретный момент времени n; Q – интенсивность преобразования каждым элементом системы X_n свободного ресурса в изменение размеров; R – значение первоначального ресурса; γ – коэффициент, отражающий влияние предыстории.

С точки зрения управления эволюцией системы возникают задачи оценить максимально возможные размеры системы и устойчивость такого предельного состояния. Получить эти оценки можно на основании анализа свойств динамики нелинейного процесса, описываемого отображением (1). Максимально возможный размер системы можно оценить на основании значений особых (неподвижных) точек. Рассмотрим значения особых (неподвижных) точек отображения (1) и условия их устойчивости. В неподвижных точках значения процесса на предыдущем и последующем шагах равны $X_{n+1} = X_n$. Для дальнейшего анализа закономерностей динамики процесса и определения значений особых точек представим отображение (1) в виде двумерного, для чего введем новую переменную Y_n, равную значению X_{n-1}:

$$\begin{cases} X_{n+1} = X_n + X_n\, Q\,(R - X_n + \gamma Y_n) \\ Y_{n+1} = X_n \end{cases} . \qquad (2)$$

Подставив в систему (2) условия равенства значений процесса в особых точках и решив систему уравнений, получим два решения, что соответствует двум возможным вариантам значений особых (неподвижных) точек процессов, описываемых отображением (2). Нулевая особая точка $X_1^* = Y_1^* = 0$; ненулевая особая точка $X_2^* = Y_2^* = \frac{R}{1-\gamma}$. Значение ненулевой особой точки определяются двумя параметрами – значением исходного ресурса R и коэффициентом влияния предыстории γ.

2.2. Оценка устойчивости особых (неподвижных) точек

Оценку значений параметров двумерных отображений, обеспечивающих устойчивость особых точек проведем в соответствии с подходами к анализу устойчивости подобного класса отображений, описанных в [1]. В [2] приведены примеры анализа устойчивости особых точек отображения (1), но не анализировался вопрос о влияния на устойчивость коэффициента предыстории. Используем аналогичные подходы для рассмотрения возможных вариантов динамики в зависимости от значений коэффициентов предыстории, которые могут порождаться системой отображений (2). Анализ устойчивости особых точек проводится на основании матрицы частных производных отображения (2):

$$\begin{vmatrix} 1 + RQ - 2QX - \gamma QY & -\gamma QX \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$$

Область устойчивости особых точек системы отображений (2) соответствует универсальному сценарию устойчивости, представимому графически в виде треугольника устойчивости в осях якобиана *J* и следа *S* матрицы частных производных. Вершины треугольника имеют следующие координаты: нижняя вершина *J*=-1 и *S*=0; верхняя левая *J*=1 и *S*=-2; верхняя правая *J*=1 и *S*=2. Выход за левую границу треугольника соответствует потере устойчивости, приводящей к колебаниям, либо переходу к аттрактору бесконечность. Выход за правую границу треугольника устойчивости соответствует смене особой точки.

Якобиан матрицы $J = -\gamma QX$, а след матрицы $S = 1 + RQ - 2QX + \gamma QY$.

2.3. Параметры, обеспечивающие устойчивость особых (неподвижных) точек

Для особой точки $X_1^* = Y_1^* = 0$, получим: $J_1 = 0$ и $S_1 = 1 + RQ$. Такие значения якобиана соответствуют вырождению треугольника устойчивости в отрезок прямой. В этом случае условием устойчивости нулевой особой точки, является:

$$-1 < S_1 < 1 \text{ или } -2 < RQ < 0\,.$$

При RQ меньше минус двух происходят колебания относительно нулевой особой точки или переход к аттрактору бесконечность. Выход значений RQ в область больше нуля, соответствует правой границе вырожденного треугольника устойчивости, и означает смену особой (неподвижной) точки - это условия перехода к ненулевой особой точке.

Рассмотрим, при каких значениях параметров обеспечивается устойчивость ненулевого значения особой точки $X_2^* = \frac{R}{1-\gamma}$, переход к которой происходит при $RQ > 0$

Подставляя выражения для второй особой точки, получим следующие значения для якобиана и следа матрицы: $J_2 = \frac{-\gamma}{1-\gamma} RQ$, $S_2 = \frac{1-\gamma-RQ}{1-\gamma}$.

Наряду со значением произведения RQ условия устойчивости ненулевых особых точек в этом случае зависят и от γ. Рассмотрим возможные значения параметров отображения (1), обеспечивающие устойчивость ненулевой особой точки в зависимости от значений γ.

Равнобедренный треугольник устойчивости можно представить в виде системы неравенств, описывающих его стороны и высоту:

$$\begin{cases} -1 < \dfrac{-\gamma}{1-\gamma} RQ < 1 \\ \dfrac{1-\gamma-RQ}{1-\gamma} < \dfrac{-\gamma}{1-\gamma} RQ + 1 \\ \dfrac{1-\gamma-RQ}{1-\gamma} > \dfrac{\gamma}{1-\gamma} RQ - 1 \end{cases}.$$

Первое неравенство описывает высоту треугольника устойчивости, задавая размер его сторон. Второе неравенство является границей устойчивости, выход за которую означает переход к нулевому аттрактору. Нарушение третьего неравенства означает потерю устойчивости ненулевой особой точки с переходом к колебаниям или к бесконечности.

Рассмотрим условия устойчивости особой точки для $1 - \gamma > 0$, или $\gamma < 1$.

$$\begin{cases} -1 + \gamma < -\gamma RQ < 1 - \gamma \\ 1 - \gamma - RQ < 1 - \gamma - \gamma RQ \\ 1 - \gamma - RQ > \gamma RQ - 1 + \gamma \end{cases}.$$

Преобразуя с учетом дополнительного условия $\gamma > 0$, что вместе с предыдущим условием соответствует $0 < \gamma < 1$:

$$\begin{cases} \frac{1-\gamma}{\gamma} > RQ > \frac{\gamma-1}{\gamma} \\ RQ > \gamma RQ \\ \gamma RQ + RQ < 2 - 2\gamma \end{cases}. \quad (3)$$

Второе неравенство системы при $RQ > 0$ выполняется только при $\gamma < 1$. В дальнейшем не будем рассматривать ситуации когда $\gamma > 1$ - там нет устойчивых ненулевых особых точек ибо одно из требований системы неравенств не выполняется.

Рассмотрим выполнение первого неравенства из (3), которое определяет высоту треугольника устойчивости при условии $0 < \gamma < 1$. Для такого диапазона значений коэффициента влияния предыстории область устойчивости особой точки будет определяться при условии: $\frac{1-\gamma}{\gamma} > RQ > 0$. При $\gamma < 0$ область устойчивости находится в диапазоне $0 < RQ < \frac{\gamma-1}{\gamma}$.

Рассмотрим границу перехода от точечного аттрактора к циклическому или бесконечному аттрактору. Эта граница соответствует левой стороне треугольника устойчивости. Его описывает третье неравенство в (3). При $-1 < \gamma < 1$ оно выражается неравенством $0 < RQ < \frac{2-2\gamma}{1+\gamma}$, а при $\gamma < -1$ третье неравенство всегда реализуется, так как $RQ > 0$.

Наглядное представление об области устойчивости ненулевой особой точки дают графики, соответствующие границам неравенств. Результаты расчетов по (3) граничных значений RQ в зависимости от значений γ представлены на рис. 1.

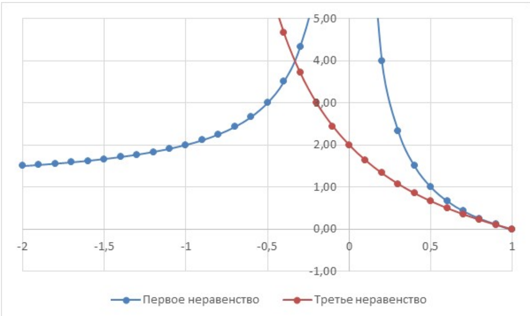

Рис. 1. Верхние границы зон устойчивости ненулевой особой точки на плоскости RQ и γ. Зона устойчивости при RQ больше нуля, но меньше минимального из значений любой границы (область под кривыми).

Условия существования ненулевого аттрактора выполняются для всех значений RQ больше нуля и лежащих ниже значений двух графиков. До значения коэффициента влияния предыстории $\gamma < -1/3$ граница определяется значениями левой стороны треугольника устойчивости, а при $\gamma > -1/3$ значениями якобиана, описывающими высоту треугольника. Точку перехода от одной зависимости к другой легко вычислить, приравняв значения для стороны треугольника устойчивости и якобиана, этой точке соответствует значение $\gamma = 1/3$. В этой точке значение нормированной интенсивности RQ равно четырем.

2.4. Соотношение значений и устойчивости особых (неподвижных) точек. Возможные стратегии эволюции

Для оценки значений особых точек и их устойчивости рассмотрим, как они зависят от влияния предыстории и нормированной интенсивности. Значения особых точек дают оценку возможного потенциала роста $X_2^* = \frac{R}{1-\gamma}$. Для оценки влияния коэффициента предыстории γ на значение особой точки и ее устойчивость, представим значение особой точки в виде произведения исходного ресурса R на безразмерный нормировочный коэффициент $\frac{1}{1-\gamma}$. Произведение RQ, определяющее границы устойчивости особых точек, также безразмерно, поэтому зависимости значений этих двух величин от γ можно рассматривать совместно., они представлены в виде графиков на рис. 2.

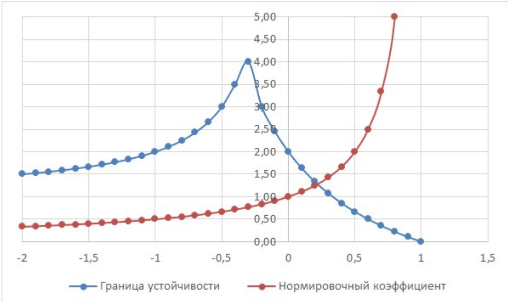

Рис. 2. Значения нормированных коэффициентов потенциала роста и границы области устойчивости особых точек в зависимости от значений коэффициента влияния предыстории.

Перед нами графическая картина, наглядно демонстрирующая противоречивость требований между обеспечением эволюции к большой по размерам системе, и обеспечением ее устойчивости в конце развития. Рассмотрим некоторые ситуации, представляющие интерес с точки зрения анализа динамики системы. Будем интерпретировать значение особой точки как потенциал возможного роста системы, который оценивается через значение первоначального ресурса, взятого с нормировочным коэффициентом. Чем больше значение нормировочного коэффициента, тем выше потенциал роста при одинаковых начальных ресурсах.

На основании рис.2 можно условно выделить несколько типов стратегий роста, подчиняющихся общему принципу «управление от достигнутого уровня». Первый тип строится на эволюции при максимальном положительном влиянии предыстории. Так, при γ=0,8 потенциал роста будет в пять раз больше исходного потенциала. Но, уже при γ>0,22 особая точка становится неустойчивой и чем больше будет выбрано значение γ, тем все более сложная колебательная динамика будет у процесса. При γ приближающемся к единице возникает динамический хаос.

Второй тип стратегии может базироваться на значениях коэффициента влияния предыстории в районе пересечения значений нормированной интенсивности и особых точек, оно происходит примерно при γ=0***,22***. Рост в этой ситуации существенно менее подвержен внешним возмущениям, реализация такого роста требует меньше ресурсов на увеличение потенциала роста, но и потенциал развития системы будет существенно меньше, он будет только в 1,28 раз больше исходного ресурса.

Можно проанализировать третью стратегию сверхбыстрого устойчивого роста. Максимальное значение нормированной интенсивности RQ=4 достигается при $\gamma = -1/3$. Такое значение нормированной интенсивности обеспечивает самый быстрый рост, но это соответствует уменьшающему влиянию предыстории на значение особой точки X_2^*, которое в этом случае будет меньше исходного и равняется 0,75.

Полученные границы устойчивости ненулевых особых точек имеют закономерности, которые сложно вывести из умозрительных представлений. Но их обязательно необходимо учитывать при проведении анализа развития системы и разработке стратегии ее развития.

Список литературы

1. Кузнецов А.П., Савин А.В., Седова Ю.В., Тюрюкина Л.В. Бифуркации отображений. Саратов: Наука, 2012 196 с.
2. Полунин Ю.А. Синтез методов нелинейной динамики и регрессионного анализа для исследования социально-экономических процессов // Проблемы управления. 2019. № 1. С. 32-44.