.

УДК 531.6: 531.391.5: 681.513.1

АДАПТИВНАЯ СИСТЕМА СТАБИЛИЗАЦИИ КОЛЕБАНИЙ

В.Н. Тхай

Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН

Россия, 117997, Москва, Профсоюзная ул., 65

E-mail: tkhai@ipu.ru

Ключевые слова: колебание, семейство, стабилизация, диссипация типа Ван дер Поля, адаптивная система

Аннотация: В докладе приводятся основные идеи, которые привели к развитию адаптивной системы стабилизации колебаний, описываемой автономным уравнением. Показывается, как получается замкнутая система с обратной связью или без обратной связи, даются необходимые ссылки.

1. Введение

Для гамильтоновой системы на плоскости Л.С. Понтрягин доказал [1] теорему, обеспечивающую существование предельного цикла: в систему вводятся малые автономные негамильтоновые возмущения. В [2] этот результат интерпретируется как естественное решение задачи стабилизации колебания путем применения малого гладкого автономного управления. Стабилизируется колебание близкой системы. Идея коррекции модели, уже с выбранным явно управлением, реализуется в уравнении Ван-дер-Поля [3].

При трактовке уравнения Ван дер Поля как замкнутой системы управления записывается:

$$\ddot{x} + \omega^2 x = \varepsilon(1 - Kx^2)\dot{x}, \qquad (1)$$

где ω и K – положительные постоянные. Здесь на линейный осциллятор с частотой ω действует управление $(1 - Kx^2)\dot{x}$ с малым коэффициентом регулятора ε. Оно представляет собой нелинейную силу, линейную по скорости $\dot{x}$, которая содержит параметр K и действует в каждой текущей точке траектории.

Уравнение (1) допускает притягивающий цикл при любых значениях ω и K. Цикл порождается линейным колебанием с амплитудой $A = 2/\sqrt{K}$. Получается, что выбором управления, зависящего от параметра K, можно стабилизивать любое колебание линейного осцилятора. При этом значение параметра K определяется энергией $h = \omega^2 A^2/2$ для линейного осциллятора. В (1) *реализуется замкнутая адаптивная система стабилизации колебаний с обратной связью.*

Другие идеи, которые привели к развитию адаптивной системы стабилизации колебаний для автономной системы, и необходимые ссылки даются в докладе.

2. Закон приближения к циклу

Энергия линейного осциллятора E_x в уравнении Ван дер Поля меняется по закону

$$\frac{dE_x}{dt} = \varepsilon(1 - Kx^2)\dot{x}^2, \quad E_x = (\dot{x}^2 + \omega^2 x^2)/2.$$

При $\varepsilon = 0$ энергия $E_x = h_x$ и $x = A\cos\omega(t+\beta)$: $h_x = \omega^2 A^2/2$. Для цикла $A = 2/\sqrt{K}$. Приращение ΔE_x функции E_x на отрезке $t \in [0, 2\pi/\omega]$ дается равенством

$$\Delta E_x = \varepsilon A^2\omega^2 \int\limits_0^{2\pi/\omega} [(1 - KA^2\cos^2\omega t)\sin^2\omega t + O(\varepsilon)]dt. \tag{2}$$

Отсюда получается, что $\Delta E_x > 0$, когда $A < 2/\sqrt{K} - O(\varepsilon)$, и $\Delta E_x < 0$, когда $A > 2/\sqrt{K} + O(\varepsilon)$. Поэтому формулу (2) можно записать в виде равенства – закона достижения системой режима цикла

$$\Delta E_x(h_x) = \varepsilon\alpha_x(h_x)\Delta h_x + o(\varepsilon), \tag{3}$$

где Δh_x – приращение энергии линейного осциллятора, а $\alpha_x(h_x) < 0$. Более того, из подынтегрального выражения в (2) следует, что чем дальше от цикла, тем больше величина $\alpha_x(h_x)$. В $O(\varepsilon)$-окрестности цикла $\alpha_x(h_x) = \alpha_x^* + O(\varepsilon)$, где $\varepsilon\omega/2\pi\alpha_x^*$ будет характеристическим показателем цикла Ван дер Поля. Поэтому из формулы $\varepsilon\alpha_x^* = dE_x(h_x^*)/dh_x$ следует справедливость закона (3) также в $O(\varepsilon)$-окрестности цикла: циклу уравнения Вандер Поля соответствует значение h_x^* энергии линейного осциллятора. На цикле $\Delta E_x = 0$, и притяжение траектории к циклу сопровождается предельным переходом $\Delta E_x \to 0$. *Большему расстоянию до цикла, отвечает большая скорость притяжения (по энергии) к циклу.*

3. Универсальное управление

Циклом называется изолированное периодическое решение автономной системы. Рассматривая гладкую систему, выбираем также гладкое управление. При этом в зависимости от переключателя σ, принимающего значения $+1$ или -1, получим кусочно-гладкую управляемую систему.

В основу поиска управления берется условие существования цикла в системе. Искомая сила разрушает семейство колебаний, поэтому представляется нечетной функцией скорости; она должна быть пригодной для всех точек семейства, включая предельную точку – равновесие. Другие соображения, включая простоту управления, связаны с реализацией управления в виде нелинейной диссипации. Наконец, учитывается существование аналога искомой силы в цепи, включающего триод.

Рассматривается уравнение [4]

$$\ddot{x} = f(x, \dot{x}) + \varepsilon\sigma r(x, \dot{x}), \quad f(x, \dot{x}) = f(x, -\dot{x}). \tag{4}$$

При $\varepsilon = 0$ уравнение (4) допускает h-семейство симметричных периодических движений (СПД): $x = \varphi(h, t+\gamma)$, где γ – сдвиг по траектории. Период T на семействе СПД является функцией h: $T = T(h)$. Предполагается, что значению параметра $h = h^*$ отвечает период $T^* = T(h^*)$.

Необходимые и достаточные условия существования T^*-периодического решения в (4) даются амплитудным уравнением

$$I(h) \equiv \int_0^{T^*} r(\varphi(h,t), \dot{\varphi}(h,t))\psi(h,t)dt = 0, \tag{5}$$

где через ψ обозначается периодическое решение сопряженной системы. Простому корню $h = h^*$ отвечает цикл (см., например, [5]).

В [4] обосновывается выбор гладкого управление r, действущего с малым коэффициентом усиления ε:

$$r = (1 - Kx^2)\dot{x}. \tag{6}$$

Из условия тождественного выполнения по h амплитудного уравнения (5), в котором вместо T^* берется $T(h)$, находится функция

$$K(h) = \int_0^{T(h)} \dot{\varphi}(h,t)\psi(h,t)dt \Big/ \int_0^{\tau(h)} \varphi^2(h,t)\dot{\varphi}(h,t)\psi(h,t)dt.$$

Конструктивно проверяемое условие простоты корня дается условием

$$\frac{dI(h^*)}{dh} = \chi\nu, \quad \chi = \frac{dK(h^*)}{dh}, \quad \nu = \int_0^{T^*} \varphi(h^*,t)^2\dot{\varphi}(h^*,t)\psi(h^*,t)dt. \tag{7}$$

Равенство $I(h^*) = 0$ *означает, что в* (5), (6) *выполняется необходимое условие существования* T^**-периодического решения. Неравенство* $\chi\nu \neq 0$ *гарантирует, что решение является циклом. При надлежащим выборе знака* σ *цикл становится притягивающим* (см. [4]). В (1) $\sigma = 1$.

4. Многомерные системы

Рассматриваются многомерные системы двух типов: а) механическая система с $n > 1$ степенями свободы, б)связанные механические системы.

4.1. Механическая система с $n > 1$ степенями свободы

Анализируется [6] уравнение Лагранжа второго рода с позиционными силами. Оно инвариантно относительно замены

$$(q, \dot{q}, t) \to (q, -\dot{q}, -t)$$

и принадлежит к классу обратимых механических систем [7]. Фазовый портрет системы симметричен относительно неподвижного множества $M = \{q, \dot{q} : \dot{q} = 0\}$.

Колебания в виде СПД образуют семейство по h. На невырожденнном семействе период $T(h)$ меняется монотонно с h.

На систему действует управление $R = (R_1, \dots, R_n)$:

$$R_s = [1 - K(h^*)b(q, \dot{q})] \sum_{j=1}^{n} l_{sj}\dot{q}_j, \quad a = 1 - K(h^*)b,$$
$$b > 0, \quad l_{sj} = const, \quad s = 1, \dots, n.$$

с малым коэффициентом усиления ε. Тем самым результаты раздела 3 обобщаются на систему с $n > 1$.

Обратимая механическая исследована в [8], система общего вида – в [9]. *Следовательно, для отдельной системы строится замкнутая адабтивная система стабилизации с обратой свяью. Она описывается кусочно-гладкой автономной системой уравнений с переключателем.*

4.2. Связанные механические системы

Для решения задачи стабилизации колебания модели, содержащей связанные подсистемы, в [2] предлагается выбирать связи, обеспечивающие одновременно существование, устойчивость и саму стабилизацию. Тогда связь действует как управление, а задача стабилизации колебания решается естественным образом, т.е. без привлечения иных управлений.

Рассматриваются [10] слабо связанные механические системы

$$\ddot{x}_s + f_s(x_s) = \varepsilon\sigma_s u_s(x, \dot{x}), \quad s = 1, \dots, n, \quad x = (x_1, \dots, x_n). \tag{8}$$

Функции $u_s(x, \dot{x})$ действуют как связи–управления, замыкающие систему на себя: ε – коэффициент усиления регулятора.

В случае $\varepsilon = 0$ система (8) распадается на независимые друг от друга консервативные системы. Это множество образует одну консервативную систему с $n > 1$ степенями свободы. Предполагается, что она допускает семейство СПД по постоянной итеграла энергии h системы. Тогда применяется управление

$$u_s = (1 - K\|x\|^2)\dot{x}_s(h, t)), \quad \|x\|^2 = \sum_{s=1}^{n} x_s^2(h, t),$$

где выбором числа K гарантируется выполнение амплитудного уравнения.

Таким образом, строится адаптивная система стабилизации колебаний для связанной системы (8). Обобщение на связанные механические произвольного порядка дается в [11, 12].

5. Адаптивная система стабилизации колебаний с разными видами связи

Рассматриваются две связанные системы, одна из которых (регулятор) действует односторонней связью на другую систему (объект управления). Получается замкнутая система управления без явной обратной связи.В качестве генератора в мехатронной системе стабилизации [13, 14] применяется осциллятор Ван дер Поля. Здесь большему расстоянию до цикла, отвечает большая скорость (по энергии) притяжения к циклу. Сдвиг фазы в колебаниих регулятора и механической системы в [13, 14] отличен от нулевого. Это наблюдение приводит к построению системы управлямых объектов с рабочим режимом – притягивающим циклом [15, 16]. *Применяется односторонняя связь.*

Задача агрегирования состоит в конструировании системы, обладающей необходимым динамическим свойством. Задача решается в рамках связанных систем. Достигается притягивающий цикл [12, 17]. *Применяется двусторонняя связь.*

6. Заключение

Адаптивная система стабилизации колебаний описывается кусочно-гладной автономной системой. Она может быть с обратной связью или без обратной связи и предназначена для реализации притягивающего цикла. Применяется универсальное управление – нелинейная сила, линейная по скорости, действующая в каждой текущей точке цикла. Оно реализуется в различных схемах стабилизации колебаний.

Список литературы

1. Понтрягин Л.С. О динамических системах, близких к гамильтоновым // Журн. эксперим. и теорет. физики. 1934. Т. 4, Вып. 9. С. 883–885.
2. Тхай В.Н. Стабилизация колебаний автономной системы // Автоматика и телемеханика. 2016. № 6. С. 38–46.
3. Van der Pol B. On relaxation-oscillations in the circuit with non-linear resistence // Philos. Mag. 1927. Ser. 7. Vol. 3.,No. 13. P. 65–80.
4. Тхай В.Н. Стабилизация колебания управляемой механической системы // Автоматика и телемеханика. 2019. № 11. С. 83–92.
5. Малкин И.Г. Некоторые задачи теории нелинейных колебаний. М.: Гостехиздат, 1956.
6. Тхай В.Н. Стабилизация колебания управляемой механической системы с N степенями свободы // Автоматика и телемеханика. 2020. № 9. С. 93–104.
7. Тхай В.Н. Обратимость механических систем // Прикл. матем. и механ. 1991. Т. 55, Вып. 4. С. 578–586.
8. Тхай В.Н. Стабилизация колебаний управляемой обратимой механической системы // Автоматика и телемеханика. 2022. № 9. С. 94–108.
9. Тхай В.Н. Стабилизация колебаний управляемой автономной системы // Автоматика и телемеханика. 2023. № 5. С. 29–44.
10. Барабанов И.Н., Тхай В.Н. Стабилизация цикла в связанной механической системе // Автоматика и телемеханика. 2021. № 1 . С. 67–76.
11. Барабанов И.Н., Тхай В.Н. Стабилизация колебаний связанных консервативных систем // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2022. № 2. С. 22–28.
12. Барабанов И.Н., Тхай В.Н. Агрегирование многомерных консервативных систем с колебаниями // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2023 (принята в печать).
13. Тхай В.Н. Мехатронная схема стабилизации колебаний // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2022. № 1. С. 9–16.
14. Тхай В.Н. Режим цикла в связанной консервативной системе // Автоматика и телемеханика. 2022. № 2. С. 90–106.

15. Тхай В.Н. Система управляемых движущихся объектов с режимом притягивающего цикла // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2024 (принята в печать).
16. Тхай В.Н. Притягивающий цикл в связанной механической системе с фазовыми сдвигами в колебаниях подсистем // Автоматика и телемеханика. 2023-2024 (принята в печать).
17. Тхай В.Н. Агрегирование автономной системы с притягивающим циклом // Автоматика и телемеханика. 2022. № 3. С. 41–53.