УДК 517.911.5

ОПТИМИЗАЦИЯ АМПЛИТУДЫ КОЛЕБАНИЙ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ С ДЕФИЦИТОМ УПРАВЛЕНИЯ

Ю.Ф. Голубев
Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН
125047, Москва, Миусская пл., 4

Аннотация. Предложен метод поиска оптимального управления амплитудой одномерных колебаний в окрестности положения равновесия для склерономной многомерной механической системы с трением. Колебательная степень свободы системы не поддается непосредственному управлению. На её движение влияют другие, непосредственно управляемые степени свободы. В число непосредственно управляемых могут входить как позиционные, так и циклические координаты. Метод не использует сопряженных переменных в смысле принципа максимума Л.С. Понтрягина и не увеличивает размерность исходной системы дифференциальных уравнений движения. На примере конкретной колебательной механической модели с сухим и вязким трением продемонстрирована эффективность применения предложенного метода.

Ключевые слова: оптимальное управление, амплитуда колебаний, дефицит управления.

1. Введение

Среди колебательных систем особый интерес вызывают механические устройства, способные управляемо раскачиваться в поле естественных сил (таких как поле силы тяжести, электрические, магнитные поля) за счет целенаправленного изменения собственной конфигурации. Примером могут служить различные варианты перемещения с помощью конечностей, например, ходьба, бег, раскачивание на качелях, работа воздушных гимнастов, работа в аварийных ситуациях и др. Изменение собственной конфигурации происходит при помощи внутренних сил, обеспечиваемых соответствующими приводами, и само по себе не может повлиять на изменение положения центра масс в системе. Для того, чтобы вызвать требуемое движение центра масс нужна опора о внешнюю среду, и если опора меняется, то в точках контакта практически невозможно обеспечить непосредственное управляющее воздействие. Тем самым естественно возникают системы с недостаточным набором приводов для всех степеней свободы (неполноприводные системы). В теории управления их ещё называют системами с дефицитом управления. Увеличение амплитуды качаний таких систем достигается за счет соответствующим образом организованного накопления энергии. С этой целью возможно применение методов оптимального управления для организации движения по свободным от приводов степеням свободы. В работе [1] предложен простой и экономный метод оптимизации колебаний для голономных консервативных систем с дефицитом управления по одной степени свободы. В нём в качестве управляющих функций выбираются непосредственно координаты управляемых степеней свободы. Этот метод не использует сопряженных переменных в смысле принципа максимума Л.С. Понтрягина и не увеличивает размерность исходной системы дифференциальных уравнений движения. В данной работе представлено дальнейшее развитие этого метода для систем с сухим и вязким трением. Показывается, что наличие трения в системе не влияет на стратегию оптимального раскачивания (торможения), следующую из работы [1]. Оно влияет лишь на фактическую зависимость управляющих функций от времени, а также на результат применения этой стратегии, затрудняя и замедляя процедуру раскачивания, а при большом вязком трении ограничивая достижимую амплитуду.

2. Метод оптимального раскачивания (успокоения) колебаний

Рассматривается склерономная голономная механическая система с кинетической энергией

$$T = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\dot{q}_i\dot{q}_j,\ n \geq 2,$$

где n – число степеней свободы системы, q_i – обобщённые координаты, $\dot{q}_i$ – обобщённые скорости, а положительно определённая симметричная матрица (a_{ij}) зависит от обобщённых координат. Уравнения движения системы записываются в форме уравнений Лагранжа 2 рода

(1) $$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i,\ i = \overline{1,n},$$

в которых t – время, Q_i – обобщённые силы. Пусть первая обобщённая координата не поддается непосредственному активному управлению, а остальные обобщённые силы могут быть сформированы нужным образом за счет доступного управляющего воздействия. Выделим первую обобщённую координату, обозначив её буквой x: $q_1 = x$. Представим обобщённую силу Q_1 в виде суммы

(2) $$Q_1 = Q_x = F(x, q_2, \cdots q_n) + R(\dot{x}, \dot{q}_2, \cdots, \dot{q}_n, x, q_2, \cdots, q_n),$$

где позиционная сила F, зависит только от x и других обобщённых координат. Сила трения R препятствует изменению координаты x и зависит как от обобщенных скоростей, так и от обобщенных координат.

Предположим, что первыми в наборе $(q_2, \ldots, q_n)$ идут $s-1$ координат, от которых обобщённая сила F зависит явно. Остальные $(n-s)$ координат, не входят явно в выражение для F. Все координаты переобозначим: $u_j = q_{j+1}$, $j = \overline{1, s-1}$ и $w_k = q_{s+k}$, $k = \overline{1, n-s}$, причём $\mathbf{u} = (u_1, \ldots, u_{s-1}) \in R^{s-1}$ – вектор координат, непосредственно влияющих на значение F, $\mathbf{w} = (w_1, \ldots, w_{n-s}) \in R^{n-s}$ – вектор координат, от которых F явно не зависит, так что, $\partial F/\partial w_k = 0$, $k = \overline{1, n-s}$. В число w-координат могут входить, например, циклические координаты. Кинетическая энергия примет вид

$$\mathrm{T} = \frac{1}{2}\left[a_{11}\dot{x}^2 + 2\dot{x}\left(\sum_{j=1}^{s-1} a_{1,j+1}\dot{u}_j + \sum_{k=1}^{n-s} a_{1,s+k}\dot{w}_k\right)\right] + T^*,$$

где

$$T^*(x, \mathbf{u}, \mathbf{w}, \dot{\mathbf{u}}, \dot{\mathbf{w}}) = \frac{1}{2}\left(\sum_{j,r=1}^{s-1} a_{j+1,r+1}\dot{u}_j\dot{u}_r + 2\sum_{j=1}^{s-1}\sum_{k=1}^{n-s} a_{j+1,k+s}\dot{u}_j\dot{w}_k +\right.$$

*k,r=*1*n−sak+s,r+swkwr*.

Следуя работе [1], в системе (1) выделим уравнение для координаты x:

(3) $$\frac{d}{dt}\left(a_{11}\dot{x} + \sum_{j=1}^{s-1} a_{1,j+1}\dot{u}_j + \sum_{k=1}^{n-s} a_{1,s+k}\dot{w}_k\right) - \frac{\partial T}{\partial x} = F(x, \mathbf{u}) + R(\dot{x}, \dot{\mathbf{u}}, \dot{\mathbf{w}}, x, \mathbf{u}, \mathbf{w}).$$

Обозначим $\mathbf{y} = (\mathbf{u}, \mathbf{u}', \mathbf{w}, \mathbf{w}')$, где $\mathbf{u}' = d\mathbf{u}/dx$, $\mathbf{w}' = d\mathbf{w}/dx$, вектор управляющих координат и их производных по координате x, и

(4) $$f(x, \mathbf{y}) = a_{11} + \sum_{j=1}^{s-1} a_{1,j+1}u'_j + \sum_{k=1}^{n-s} a_{1,s+k}w'_k.$$

Будем считать, что векторы $\mathbf{u} = \mathbf{u}(t)$, $\mathbf{w} = \mathbf{w}(t)$ каким-либо образом назначены и ограничены:

(5) $$\begin{matrix} \left|u_j^m \leq u_j(t) \leq u_j^M\right|, & \left|w_k^m \leq w_k(t) \leq w_k^M\right|, \\ \left|\dot{u}_j^m \leq \dot{u}_j(t) \leq \dot{u}_j^M\right|, & \left|\dot{w}_k^m \leq \dot{w}_k(t) \leq \dot{w}_k^M\right|, \end{matrix}\ j = \overline{1, s-1},\ k = \overline{1, n-s}.$$

Эти вектор-функции будем рассматривать как функции управления системой. Тогда обобщённые силы $Q_2, \ldots, Q_n$ вычисляются в соответствии с уравнениями (1) таким образом, чтобы указанные вектор-функции $\mathbf{u}(t)$, $\mathbf{w}(t)$ реализовались.

Предположим, что силовая функция

$$U(x, \mathbf{u}(\cdot)) = \int_{x_0}^{x} F(\tau, \mathbf{u}(\tau))\, d\tau$$

имеет изолированный максимум по координате x при $\mathbf{u}(\tau) \equiv 0$ и этот максимум остается изолированным, когда $\mathbf{u}(\tau)$ меняется. Будем рассматривать движение в окрестности этого максимума. Пусть начальные условия выбраны так, что равенство $\dot{x}_0 = \dot{x}(x_0) = 0$ выполнено, когда $x = x_0$. Назовем амплитудой колебаний величину $J = x_1 - x_0$, где $x_1 > x_0$ – следующее значение координаты x, когда $\dot{x}_1 = \dot{x}(x_1)$ обращается в ноль. В этом случае аргумент изолированного максимума силовой функции $U(x, \mathbf{u}(\cdot))$ будет принадлежать отрезку $[x_0, x_1]$. В общем случае этот аргумент может меняться в зависимости от выбранных вектор-функций $\mathbf{u}(t)$, $\mathbf{w}(t)$. На концах отрезка должно быть выполнено

$$\dot{x}_0 = \dot{x}_1 = 0.$$

Требуется найти кусочно-непрерывные управления $\mathbf{u}(x)$, $\mathbf{w}(x)$, при которых достигается максимум (минимум) функционала J.

Участок, где $\dot{x} < 0$ (монотонное убывание координаты x), вполне аналогичен участку монотонного возрастания этой координаты с той лишь разницей, что вместо максимума (минимума) функционала J надо искать его минимум (максимум).

В предположении, что $f(x, \mathbf{y}) \neq 0$, справедливы следующие теоремы.

Теорема°1. **(Принцип наилучшего раскачивания).** Предположим, что движение системы описывается уравнением (1.3) и существуют две точки x_0 и x_1, причем $x_0 < x_1$ и $\dot{x}_0 = \dot{x}_1 = 0$. Тогда

I. Необходимыми условиями оптимальности управлений $\mathbf{u} = \mathbf{u}_M(\tau)$, $\dot{\mathbf{w}}_M(x_1)$, которые, будучи стесненными ограничениями (5), при фиксированном значении x_0обеспечивают максимум величины x_1, служат уравнения

$$\mathbf{u}_M(x) = \underset{\mathbf{u}}{\operatorname{argmax}}[\chi(x, \mathbf{y}_M) F(x, \mathbf{u})],$$

$$\dot{\mathbf{w}}_M(x_1) = \underset{\dot{\mathbf{w}}}{\operatorname{argmin}}\left[\sum_{k=1}^{n-s} a_{1,s+k}(x_1, \mathbf{u}_M, \mathbf{w}_M)\dot{w}_k\right],$$

где $\chi = \operatorname{sign}[f(x, \mathbf{y}(x)) f(x_1 - 0, \mathbf{y}(x_1 - 0))]$.

II. Необходимыми условиями оптимальности управлений $\mathbf{u} = \mathbf{u}_m(x)$, $\dot{\mathbf{w}}_m(x_0)$, которые, будучи стесненными ограничениями (5), при фиксированном значении x_1 обеспечивают минимум величины x_0, служат уравнения

$$\mathbf{u}_m(x) = \underset{\mathbf{u}}{\operatorname{argmin}}[\chi(x, \mathbf{y}_m) F(x, \mathbf{u})],$$

$$\dot{\mathbf{w}}_m(x_0) = \underset{\dot{\mathbf{w}}}{\operatorname{argmax}}\left[\sum_{k=1}^{n-s} a_{1,s+k}(x_0, \mathbf{u}_m, \mathbf{w}_m)\dot{w}_k\right],$$

где $\chi = \operatorname{sign}[f(x, \mathbf{y}(x)) f(x_0 + 0, \mathbf{y}(x_0 + 0))]$.

Т е о р е м а °2. (**Принцип оптимального успокоения колебаний**). Предположим, что движение системы описывается уравнениями (3) и имеются две точки x_0 и x_1, такие, что $x_0 < x_1$, $\dot{x}_0 = \dot{x}_1 = 0$. Тогда

I. Необходимое условие оптимальности управлений $\mathbf{u} = \mathbf{u}_m(\tau)$, $\dot{\mathbf{w}}_m(x_1)$, которые, будучи стесненными ограничениями (5), при фиксированном значении x_0 обеспечивают минимум величины x_1, выражается равенствами

$$\mathbf{u}_m(x) = \underset{\mathbf{u}}{\operatorname{argmin}}[\chi(x, \mathbf{y}_m) F(x, \mathbf{u})],$$

$$\dot{\mathbf{w}}_m(x_1) = \underset{\dot{\mathbf{w}}}{\operatorname{argmax}}\left[\sum_{k=1}^{n-s} a_{1,s+k}(x_1, \mathbf{u}_m, \mathbf{w}_m)\dot{w}_k\right],$$

где $\chi = \operatorname{sign}[f(x, \mathbf{y}(x)) f(x_1 - 0, \mathbf{y}(x_1 - 0))]$.

II. Необходимые условия оптимальности управлений $\mathbf{u} = \mathbf{u}_M(x)$, $\dot{\mathbf{w}}_M(x_0)$, которые, будучи стесненными ограничениями (5), при фиксированном значении x_1 обеспечивают максимум величины x_0, выражаются уравнениями

$$\mathbf{u}_M(x) = \underset{\mathbf{u}}{\operatorname{argmax}}\left[\chi(x, \mathbf{y}_M) F(x, \mathbf{u})\right],$$

$$\dot{\mathbf{w}}_M(x_0) = \underset{\dot{\mathbf{w}}}{\operatorname{argmin}}\left[\sum_{k=1}^{n-s} a_{1,s+k}(x_0, \mathbf{u}_M, \mathbf{w}_M)\dot{w}_k\right],$$

где $\chi = \operatorname{sign}[f(x, \mathbf{y}(x)) f(x_0 + 0, \mathbf{y}(x_0 + 0))]$.

3. Заключение

Предложенные условия оптимальности не содержат сопряженных переменных в смысле принципа максимума Л.С. Понтрягина. Это облегчает применение указанных условий для рассмотренного класса задач. Показано, что наличие трения не влияет на правило выбора оптимального управления. Трение влияет лишь на результат применения этого правила в каждом конкретном случае. Они эффективны как для задач раскачивания, так и для задач успокоения колебаний. Рассмотрен пример, который иллюстрирует особенности применения предложенного метода в системах с трением и демонстрирует технику учета трения покоя в колебательных системах. Отмечено, что линейное по скорости вязкое трение ограничивает достижимые значения амплитуды, а сухое Кулоновское трение такой особенностью не обладает, но замедляет развитие процесса, а при значительном коэффициенте трения препятствует возникновению требуемых колебаний. Предложен метод, использующий трение для поддержания амплитуды колебаний в окрестности её заданного значения.

Список литературы

1. Голубев Ю.Ф. Оптимизация колебаний механических систем с трением // Доклады российской академии наук. Математика, информатика, процессы управления. 2023. Т. 512. С. 18-26. DOI: 10.31857/S2686954323600052.