УДК 517.9

КОЛЕБАНИЯ В СИСТЕМАХ С ПЕРИОДИЧЕСКИМИ НЕЛИНЕЙНОСТЯМИ

А.П. Елсаков
Санкт-Петербургский государственный архитектурно-строительный университет
Россия, 190005, Санкт-Петербург, 2-я Красноармейская ул., 4
E-mail: elsakov982@inbox.ru

А.В. Проскурников
АО Навис
Россия, 199106, Санкт-Петербург, 22 линия В.О., 3, к. 5, лит. Е
E-mail: avp1982@gmail.com

В.Б. Смирнова
Санкт-Петербургский государственный университет,
математико-механический факультет,
Санкт-Петербургский государственный архитектурно-строительный университет
Россия, 190005, Санкт-Петербург, 2-я Красноармейская ул., 4
E-mail: smirnova_vera_b@mail.ru

Ключевые слова: Система синхронизации, частотное условие, высокочастотные колебания, глобальная асимптотическая устойчивость.

Аннотация: Системы с периодическими нелинейностями, как правило, обладают счетным множеством положений равновесия, и их устойчивость понимается как сходимость каждого решения к какому-либо положению равновесия. Для исследования асимптотики таких систем потребовалась разработка специальных процедур в рамках классических методов Ляпунова и Попова. Достаточные условия сходимости решений имеют вид многопараметрических частотных неравенств, сформулированных в терминах передаточной функции линейной части системы. Те же неравенства, будучи выполненными лишь для частот больших, чем ω_0, гарантируют отсутствие колебаний с частотами, превышающими ω_0. В докладе оптимизированы полученные ранее условия устойчивости и отсутствия колебаний. Новые условия позволяют улучшить оценки областей с заданными асимптотическими свойствами.

1. Введение

В докладе продолжено исследование асимптотического поведения бесконечномерных систем управления с периодическими нелинейными функциями, описываемых интегро-дифференциальными уравнениями Вольтерра (см. статью [1] и библиографию в ней). Такие системы часто называют системами синхронизации.

Рассматриваемая математическая модель описывает широкий класс систем. Она охватывает математический маятник [2], системы фазовой синхронизации [3,4], системы дальней связи [5], электрические машины [6, 7], вибрационные машины [8–10], биологические системы [11]. Системы синхронизации обладают, как правило, счетным множеством положений равновесия как устойчивых по Ляпунову, так и неустойчивых. Глобальная асимптотическая устойчивость обычно понимается как сходимость каждого решения к одному из положений равновесия. В результате, методы исследования устойчивости, разработанные для систем с единственным положением равновесии, оказались непригодными для систем синхронизации. Классические методы были дополнены специальными процедурами, которые позволили «приспособить» их к новому типу асимптотического поведения [12].

Если система синхронизации не яляется глобально устойчивой, она может иметь периодические режимы. Поскольку в системах синхронизации высокочастотные колебания нежелательны, возникает проблема оценок для частот возможных колебаний. Специальные процедуры, разработанные для исследования устойчивости оказались весьма полезными при получении оценок частоты колебаний. С помощью аппарата рядов Фурье удалось установить ряд частотно-алгебраических критериев отсутствия высокочастотных колебаний [13]. Критерии сформулированы в терминах передаточной функции линейной части системы, в форме частотных неравенств с варьируемыми параметрами. При этом условия отсутствия каких-либо колебаний оказались совпадающими с условиями глобальной асимптотической устойчивости. С помощью частотно-алгебраических критериев можно получать оценки для областей с низкочастотными колебаниями.

В этом докладе представлены новые улучшенные формулировки частотных критериев. Новый критерий отсутствия высокочастотных колебаний применяется к системам фазовой автоподстройки частоты с пропорционально-интегрирующим фильтром.

2. Постановка задачи

Рассмотрим систему синхронизации с распределенными параметрами, описываемую интегро-дифференциальным уравнением Вольтерра

$$\frac{d\sigma}{dt} = b(t) + \rho\varphi(\sigma(t-h)) - \int_0^t \gamma(t-\tau)\varphi(\sigma(\tau))\,d\tau \quad (t>0). \tag{1}$$

$\rho \in \mathbb{R}, h \geqslant 0; b, \gamma : [0, +\infty) \to \mathbb{R};\ \ \varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Сделаем следующие предположения.

П1) Функция $b(t)$ непрерывна, функция $\gamma(t)$ кусочно-непрерывна, и

$$b(t) \to 0 \quad \text{при} \ \ t \to +\infty.$$

П2) Линейная часть системы (1) устойчива:

$$b(t)e^{rt}, \gamma(t)e^{rt} \in L_2[0, +\infty) \quad (r>0). \tag{2}$$

П3) Функция $\varphi(\sigma)$ непрерывно дифференцируема, Δ– периодична. Она имеет два нуля $\sigma_1,\, \sigma_2 \in [0,\, \Delta)$, причем

$$\varphi'(\sigma_1)\cdot\varphi'(\sigma_2) < 0.$$

Система (1) имеет счетное множество положений равновесия.

Основной задачей исследования асимптотического поведения системы (1) является задача глобальной асимптотической устойчивости.

Определение 1. *Говорят, что уравнение* (1) *глобально асимптотически устойчиво, если любое его решение сходится к какому-либо положению равновесия.*

Если система (1) не обладает глобальной асимптотической устойчивостью, то в ней могут возникнуть колебания. Тогда появляется задача об обеспечении отсутствия высокочастотных колебаний.

Определение 2. *Говорят, что уравнение* (1) *имеет периодическое решение* $\sigma(t)$, *если можно указать такое положительное число* $T>0$ *и такое целое число* I, *что*

$$\sigma(t+T)=\sigma(t)+I\Delta, \quad \forall t>0.$$

Число $\omega=\frac{2\pi}{T}$ *называется частотой периодического решения. Если* $I=0$, *то* $\sigma(t)$ *называется периодическим решением первого рода. Если* $I\neq 0$, *то* $\sigma(t)$ *называется периодическим решением второго рода.*

К настоящему времени для решения задач асимптотического поведения системы (1) уже накоплен ряд частотно-алгебраических критериев. В данном докладе устанавливается частотный критерий, доставляющий наилучшие оценки областей устойчивости и областей отсутствия колебаний в пространстве параметров системы.

3. Условия отсутствия высокочастотных колебаний

Частотно-алгебраические условия формулируются в терминах передаточной функции линейной части системы от входа φ к выходу $(-\dot{\sigma})$:

$$K(p)=-\rho e^{-ph}+\int\limits_0^\infty \gamma(t)e^{-pt}\,dt \quad (p\in\mathbb{C}).$$

Пусть $A_1\triangleq\inf\limits_{\sigma\in[0,\Delta)}\varphi'(\sigma)$, $\quad A_2\triangleq\sup\limits_{\sigma\in[0,\Delta)}\varphi'(\sigma)$. Очевидно, что $A_1<0<A_2$. Предположим, что $\alpha_1\leqslant A_1$, $\quad \alpha_2\geqslant A_2$ и введем обозначение $\alpha\triangleq(\alpha_1,\alpha_2)^T$.

Нам понадобятся функции

$$\Phi(\sigma;\alpha)\triangleq\sqrt{(1-\alpha_1^{-1}\varphi'(\sigma))(1-\alpha_2^{-1}\varphi'(\sigma))},$$

где $\alpha_i^{-1}=0$, если $\alpha_i=\pm\infty$ $(i=1,2)$ (α_i может быть числом или $\pm\infty$), и постоянные

$$\nu(\varepsilon,\tau,\alpha)\triangleq\frac{\int\limits_0^\Delta\varphi(\sigma)\,d\sigma}{\int\limits_0^\Delta|\varphi(\sigma)|\sqrt{\varepsilon+\tau\Phi^2(\sigma;\alpha)}\,d\sigma}.$$

Из статей [1, 14] вытекает справедливость следующего утверждения.

Теорема 1. *Предположим, что можно указать такое число $\bar{\omega} \geqslant 0$ и такие числа $\varepsilon > 0$, $\tau > 0$, $\alpha_1 \leqslant A_1$, $\alpha_2 \geqslant A_2$, что*

$$\inf_{\{\omega=0\}\bigcup\{\omega\geqslant\bar{\omega}\}} \Pi(\omega;\ \varepsilon,\tau,\alpha) > \frac{\nu^2(\varepsilon,\tau,\alpha)}{4},$$

где

$$\Pi(\omega;\varepsilon,\tau,\alpha) \overset{\Delta}{=} ReK(\imath\omega) - \tau(\alpha_2^{-1}+\alpha_1^{-1})\omega ImK(\imath\omega) - (\varepsilon+\tau)|K(\imath\omega)|^2 + \\ +|\alpha_1^{-1}\alpha_2^{-1}|\tau\omega^2 \ \ (\imath^2=-1).$$

Тогда
i) если $\bar{\omega}=0$, уранение (1) *глобально асимптотически устойчиво;*
ii) если $\bar{\omega}>0$, уранение (1) *не имеет периодических решений с частотой $\omega \geqslant \bar{\omega}$.*

Условия Теоремы 1 предполагают, что тройки варьируемых параметров $\{\varepsilon,\tau,\alpha\}$ удовлетворяют неравенству

$$K(0) - (\varepsilon+\tau)K^2(0) > \frac{\nu^2(\varepsilon,\tau,\alpha)}{4}. \tag{3}$$

Если неравенство (3) не выполнено, то Теорема 1 неприменима.

Пусть неравенство (3) выполнено. Выберем для $(\varepsilon,\tau,\alpha)$ наибольшее из значений ω, для которых

$$\Pi(\omega;\varepsilon,\tau,\alpha) \leqslant \frac{\nu^2(\varepsilon,\tau,\alpha)}{4}.$$

В силу (2) такое значение существует. Обозначим его через $\tilde{\omega}(\varepsilon,\tau,\alpha)$.

Положим

$$\omega_0 \overset{\Delta}{=} \inf_{(\varepsilon,\tau,\alpha)} \tilde{\omega}(\varepsilon,\tau,\alpha).$$

Теорема 2. *Пусть выполнено* (3). *Тогда если $\omega_0 = 0$, то уравнение* (1) *глобально асимптотически устойчиво, а если $\omega_0 > 0$, то уравнение* (1)*не имеет периодических решений частоты большей, чем ω_0.*

4. Оценки областей с низкочастотными колебаниями

Результаты Теоремы 2 были применены к системам фазовой автоподстройки частоты (ФАПЧ) с пропорционально-интегрирующим фильтром (ПИФ), синусоидальной характеристикой фазового детектора (ФД) и запаздыванием h в петле обратной связи. В этом случае

$$K(p) = T\frac{sTp+1}{Tp+1}e^{-ph} \quad (h \geqslant 0, T>0, s\in(0,1)), \\ \varphi(\sigma) = \sin\sigma - \bar{\beta} \quad (\bar{\beta}\in(0,\,1)). \tag{4}$$

На рис. 1 для $s = 0.2$ в случаях $h = 0$ и $h = 0.1T$ приведены границы областей низкочастотных колебаний с частотой большей, чем заданное значение. Области лежат ниже своих границ.

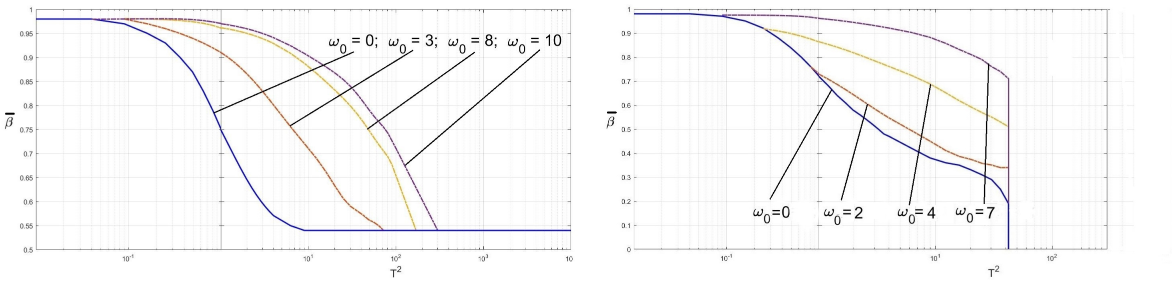

Рис. 1. Области низкочастотных колебаний для ФАПЧ с ПИФ:
слева $h = 0$, справа $h = 0.1T$

5. Заключение

В докладе приводятся новые частотно-алгебраические критерии отсутствия высокочастотных колебаний в системах синхронизации с распределенными параметрами.

Список литературы

1. Smirnova V.B., Proskurnikov A.V. Volterra Equations with Periodic Nonlinearities: Multistability, Oscillations and Cycle Slipping // Int. J. Bifurcation and Chaos. 2019. Vol. 29, No. 5. P. 1950068.
2. Барбашин Е.А., Табуева В.А. Динамические системы с цилиндрическим фазовым пространством. М.: Наука. 1969. 280 с.
3. Best R.E. Phase-locked Loops: Design, Simulation and Applications. McGraw-Hill. 2003.
4. Leonov G.A., Kuznetsov N.V., Yuldashev M.V., Yuldashev R.V. Hold-In, Pull-In, and Lock-In Ranges of PLL Circuits: Rigorous Mathematical Definitions and Limitations of Classical Theory // IEEE Trans. Circuits and Systems-I. 2015. Vol. CS-62, No. 10. P. 2454–2464.
5. Солодов А.В., Солодова Е.А. Системы с переменным запаздыванием. М.: Наука. 1980.
6. Halanay A. Stability problem for synchronous machines // In “VII Intern. Konf. uber nichtlinear Schwingungen. Abh. der Acad. Wiss, DDR. Abt.-Naturwiss-Techn”. Springer Int. Publ. 1975. Bd. II, No. 5. P. 407–421.
7. Леонов Г.А., Кондратьева Н.В. Анализ устойчивости электрических машин переменного тока. СПб: Изд. СПбГУ. 2008. С. 200.
8. Блехман И.И. Синхронизация в природе и технике // М.: Наука. 1981. 352 с.
9. Sperling L. and Merten F.and Duckstein H. Rotation und Vibration in Beispilen zur Methode der direkten Bewegungsteilung // Technische Mechanik. 1997. Vol. 17, No. 3. P. 231–243.
10. Tomchina O.P. Control of oscillations in two-rotor cyberphysical vibration units with time-varying observer // Cybernetics and Physics. 2020. Vol. 9, No. 4. P. 206–213.
11. Somolinos A.S. Periodic solutions of the sunflower equation // Quarterly of Appl.Math. 1978. January. P. 465–478.
12. Leonov G.A., Ponomarenko D.V., Smirnova V.B. Frequency-Domain Methods for Nonlinear Analysis. Theory and Applications. Singapore–New Jersey–London–Hong Kong: World Scientific. 1996. 500 p.
13. Perkin A.A., Smirnova V.B., Shepeljavyi A.I., Utina N.V. Upper bounds for frequency of periodic regimes in many-dimensional and infinite dimensional phase synchronization systems // Cybernetics and Physics. 2015. Vol. 4, No. 2. P. 41–48.
14. Proskurnikov A.V., Smirnova V.B. Constructive estimates of the pull-in range for synchronization circuit described by integro-differential equations // Proc. of IEEE International Symposium on Circuts and Systems (ISCAS). Seville, Spain. 2020. P. 09180519.