УДК 517.977

ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ СТАБИЛИЗАЦИИ СТАЦИОНАРНОЙ БИЛИНЕЙНОЙ НЕОДНОРОДНОЙ ДИСКРЕТНОЙ СИСТЕМЫ СО СКАЛЯРНЫМ ВХОДОМ С КОМПЛЕКСНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

В.А. Зайцев

Удмуртский государственный университет

Россия, 426034, Ижевск, Университетская ул., 1

E-mail: verba@udm.ru

Ключевые слова: асимптотическая стабилизация, билинейная система, дискретная система, комплексная система.

Аннотация: Рассматривается стационарная билинейная неоднородная система управления со скалярным входом с дискретным временем с комплексными коэффициентами. Получены достаточные условия глобальной асимптотической стабилизации нулевого решения этой системы посредством обратной связи по состоянию. Приводится иллюстрирующий пример.

Пусть $\mathbb{K}=\mathbb{C}$ или $\mathbb{K}=\mathbb{R}$, где $\mathbb{C}$ – множество комплексных чисел, $\mathbb{R}$ – множество вещественных чисел; $\mathbb{K}^n=\{x=\operatorname{col}(x_1,\ldots,x_n)\colon x_i\in\mathbb{K}\}$; $M_{m,n}(\mathbb{K})$ – пространство $m\times n$-матриц с элементами из $\mathbb{K}$; T – транспонирование; $*$ – эрмитово сопряжение, т.е. $A^*=\overline{A}^T$; $|x|=\sqrt{x^*x}$ – норма в $\mathbb{K}^n$; $\mathbb{Z}$ – множество целых чисел. Неравенства $P>(\geqslant)\,Q$ для эрмитовых матриц понимаются в смысле квадратичных форм.

Рассмотрим стационарную билинейную неоднородную систему управления с дискретным временем:

$$z(t+1)=Az(t)+\Big(B\big(z(t)\big)+D\Big)u(t). \tag{1}$$

Здесь $z\in\mathbb{K}^n$ – вектор состояния, $u\in\mathbb{K}^r$ – управление, $t\in\mathbb{Z}$, $B(z)=[B_1z,\ldots,B_rz]\in M_{n,r}(\mathbb{K})$, $A,B_j\in M_{n,n}(\mathbb{K})$, $j=\overline{1,r}$, $D\in M_{n,r}(\mathbb{K})$. Соответствующая свободная система имеет вид

$$z(t+1)=Az(t). \tag{2}$$

Исследуется проблема глобальной асимптотической стабилизации нулевого решения системы (1) посредством статической обратной связи по состоянию: требуется построить закон управления $\widehat{u}(z)\in\mathbb{K}^r$, $z\in\mathbb{K}^n$, где $\widehat{u}(0)=0$, так что система (1), замкнутая обратной связью

$$u(t)=\widehat{u}\big(z(t)\big), \tag{3}$$

глобально асимптотически устойчива в нуле.

В случае когда $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, эта проблема была решена в [1, 2]. Приведем этот результат. Предполагается, что свободная система (2) является (неасимптотически) устойчивой по Ляпунову. Это условие равносильно тому, что существует матрица $P = P^T \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ такая, что

$$P > 0 \quad \text{и} \quad A^T PA - P \leqslant 0.$$

Построим следующие множества [2]:

$$\Omega_m = \{z \in \mathbb{R}^n : (A^i z)^T (A^T PA - P)(A^i z) = 0,\, i = 0, \dots, m\},$$
$$S_m = \{z \in \mathbb{R}^n : (A^{i+1} z)^T P\big(B(A^i z) + D\big) = 0,\, i = 0, \dots, m\}.$$

Теорема 1. *Пусть* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. *Пусть свободная система* (2) *устойчива по Ляпунову. Предположим, что существует* $m \geqslant 0$ *такое, что* $\Omega_m \cap S_m = \{0\}$. *Тогда система* (1) *глобально асимптотически стабилизируема обратной связью* (3) *с законом управления*

$$\widehat{u}(z) = -\big[I + (1/2)\big(B(z) + D\big)^T P\big(B(z) + D\big)\big]^{-1}\big(B(z) + D\big)^T PAz.$$

Пусть теперь коэффициенты системы (1) являются комплексными, т.е. $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Комплекснозначные системы находят применение во многих областях и привлекают все большее внимание исследователей (см. [3–5] и ссылки там). Они широко используются в нейронных сетях с комплексными переменными [6], в квантовой механике [7, 8], в частности, для билинейных систем [9].

Методика стабилизации в [2] основана на дискретном варианте теоремы Барбашина–Красовского. Эта теорема относится ко второму методу Ляпунова (методу функции Ляпунова). Она не может быть применена к системам с комплексными коэффициентами общего вида, поскольку второй метод Ляпунова (в отличие от первого метода Ляпунова) не работает, в общем случае, для комплекснозначных систем. Здесь мы получаем обобщение теоремы 1 на комплексные билинейные неоднородные системы со скалярным входом ($r = 1$). Ранее соответствующие результаты были получены в [10] для комплексной билинейной однородной системы ($D = 0$) со скалярным входом ($r = 1$). Аналогичные результаты для комплексных билинейных систем с непрерывным временем были получены в [11, 12].

Пусть далее $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ и $r = 1$ в системе (1). Предположим, что система (2) устойчива по Ляпунову. Это равносильно (см. доказательство, например, в [10, Лемма 5]) тому, что существует матрица $Q = Q^* \in M_{n,n}(\mathbb{C})$ такая, что

$$Q > 0, \quad A^* QA - Q \leqslant 0. \tag{4}$$

Построим следующие множества:

$$\mathcal{O}_m = \{z \in \mathbb{C}^n : (A^i z)^* (A^* QA - Q)(A^i z) = 0,\, i = 0, \dots, m\},$$
$$\mathcal{S}_m = \{z \in \mathbb{C}^n : (A^{i+1} z)^* Q\big(B(A^i z) + D\big)$$
$$+\big(B(A^i z) + D\big)^* QA^{i+1} z = 0,\, i = 0, \dots, m\}.$$

Имеет место следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ и $r = 1$. Пусть свободная система* (2) *устойчива по Ляпунову. Предположим, что существует $m \geqslant 0$ такое, что $\mathcal{O}_m \cap \mathcal{S}_m = \{0\}$. Тогда система* (1) *глобально асимптотически стабилизируема обратной связью* (3) *с законом управления*

$$\widehat{u}(z) = -\frac{z^*A^*Q\big(B(z)+D\big) + \big(B(z)+D\big)^*QAz}{1+\big(B(z)+D\big)^*Q\big(B(z)+D\big)}. \tag{5}$$

Пример 1. *Пусть $n = 2$, $r = 1$. Рассмотрим систему* (1) *с матрицами*

$$A = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -1/2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad L = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{6}$$

Собственные значения матрицы A равны i, $-1/2$. Свободная система (2) *устойчива по Ляпунову. Построим матрицу $Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Тогда выполнены условия* (4). *Проверим, что выполнены условия теоремы 2. Положим $m = 1$. Пусть $z = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+ib \\ c+id \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^2$. Тогда*

$$z^*(A^*QA - Q)z = -(3/4)(c^2+d^2), \tag{7}$$

$$(Az)^*Q(Bz+D) + (Bz+D)^*Q(Az) = 2bc - 2b - 2ad - ac - bd, \tag{8}$$

$$(A^2z)^*Q\big(B(Az)+D\big) + \big(B(Az)+D\big)^*Q(A^2z) = -ac - 2a - bd + \frac{ad-bc}{2}. \tag{9}$$

Предположим, что $z \in \mathcal{O}_m \cap \mathcal{S}_m$. Используем равенство в определении множества $\mathcal{O}_m$ при $i = 0$. Тогда из условия $z \in \mathcal{O}_m$ и равенства (7) *получаем, что*

$$c = 0, \quad d = 0. \tag{10}$$

Используем равенства в определении множества $\mathcal{S}_m$ при $i = 0, 1$. Тогда из условия $z \in \mathcal{S}_m$ и равенств (8), (9) *и* (10) *получаем, что $a = 0$ и $b = 0$. Следовательно $z = 0$. Таким образом, условия теоремы 2 выполнены. Построим закон управления по формуле* (5). *Пусть $z = \operatorname{col}(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$. Тогда получаем, что*

$$\widehat{u}(z) = -\frac{iz_1(-\overline{z}_2+1) - i\overline{z}_1(-z_2+1) - (\overline{z}_2 z_1 + z_2\overline{z}_1)/2}{1+|z_1^2|+|z_2-1|^2}. \tag{11}$$

В обозначениях $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$ управление (11) *имеет вид*

$$\widehat{u}(z) = -\frac{2\big(y_1(x_2-1) - x_1y_2\big) - (x_1x_2 + y_1y_2)}{1+x_1^2+y_1^2+(x_2-1)^2+y_2^2}.$$

Обратная связь (3), (11) *глобально асимптотически стабилизирует нулевое решение системы* (1), (6). *На рисунке 1 представлен график функции $|z(t)|$ при $t = 0, \ldots, 50$ с начальным условием $z(0) = \operatorname{col}(100+100i, 100+100i)$, где $z(t)$ – решение замкнутой системы.*

Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования РФ в рамках государственного задания, проект FEWS-2024-0009.

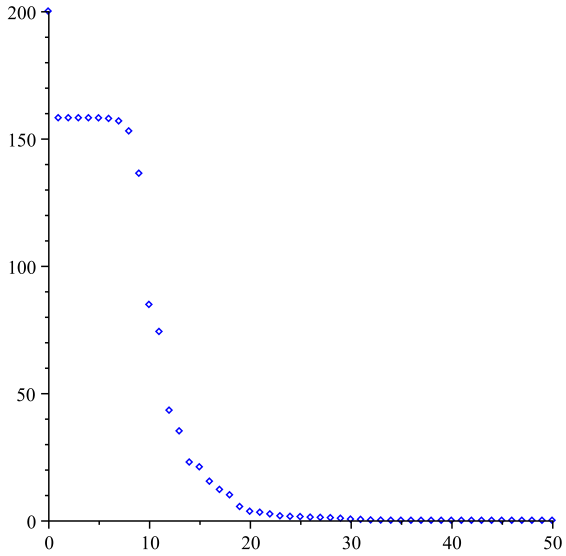

Рис. 1. График функции $|z(t)|$

Список литературы

1. Byrnes C.I., Lin W., Ghosh B.K. Stabilization of discrete-time nonlinear systems by smooth state feedback // Systems & Control Letters. 1994. Vol. 21, No. 3. P. 255–263.
2. Lin W., Byrnes C.I. KYP lemma, state feedback and dynamic output feedback in discrete-time bilinear systems // Systems & Control Letters. 1994. Vol. 23, No. 2. P. 127–136.
3. Fang T., Sun J. Stability analysis of complex-valued nonlinear delay differential systems // Systems & Control Letters. 2013. Vol. 62, No. 10. P. 910–914.
4. Song R., Wei Q., Li Q. Optimal control for a class of complex-valued nonlinear systems // Adaptive Dynamic Programming: Single and Multiple Controllers. Studies in Systems, Decision and Control. Vol 166. Singapore: Springer, 2019. P. 95–111.
5. Xu L., Ge S.S. Asymptotic behavior analysis of complex-valued impulsive differential systems with time-varying delays // Nonlinear Analysis: Hybrid Systems. 2018. Vol. 27. P. 13–28.
6. Lee C., Hasegawa H., Gao S. Complex-valued neural networks: a comprehensive survey // IEEE/CAA Journal of Automatica Sinica. 2022. Vol. 9, No. 8. P. 1406–1426.
7. Cong S. Control of quantum systems: theory and methods. John Wiley & Sons, 2014.
8. Petersen I.R. Control of quantum systems // Encyclopedia of Systems and Control. London: Springer, 2019. P. 1–8,
9. Altafini C. Feedback stabilization of isospectral control systems on complex flag manifolds: application to quantum ensembles // IEEE Transactions on Automatic Control. 2007. Vol. AC-52, No. 11. P. 2019–2028.
10. Zaitsev V., Zaitsev E. Global asymptotic stabilization of single-input bilinear discrete time-invariant complex systems // 2022 IEEE 61st Conference on Decision and Control (CDC). 2022. P. 5769–5774.
11. Zaitsev V. Global asymptotic stabilization of autonomous bilinear complex systems // European Journal of Control. 2022. Vol. 65. P. 100644.
12. Zaitsev V. Global asymptotic stabilization of time-invariant bilinear non-homogeneous complex systems // 2023 IEEE 62nd Conference on Decision and Control (CDC). 2023. P. 1–6.