УДК 517.929, 517.977

# О НАЗНАЧЕНИИ КОНЕЧНОГО СПЕКТРА И СТАБИЛИЗАЦИИ БИЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ С НЕСКОЛЬКИМИ СОСРЕДОТОЧЕННЫМИ И РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ЗАПАЗДЫВАНИЯМИ

**В.А. Зайцев**

*Удмуртский государственный университет*

Россия, 426034, Ижевск, Университетская ул., 1

E-mail: verba@udm.ru

**И.Г. Ким**

*Удмуртский государственный университет*

Россия, 426034, Ижевск, Университетская ул., 1

E-mail: kimingeral@gmail.com

**Ключевые слова:** билинейные системы, запаздывание, назначение спектра, стабилизация.

**Аннотация:** Для билинейной системы управления, заданной линейной стационарной дифференциальной системой с несколькими сосредоточенными и распределенными запаздываниями в переменной состояния, получены достаточные условия разрешимости задачи о назначении произвольного конечного спектра. Получено следствие о стабилизации.

Пусть $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ или $\mathbb{K} = \mathbb{R}$; $\mathbb{K}^n = \{x = \operatorname{col}(x_1, \ldots, x_n) \colon x_i \in \mathbb{K}\}$; $M_{m,n}(\mathbb{K})$ – пространство $m \times n$-матриц с элементами из поля $\mathbb{K}$; $M_n(\mathbb{K}) := M_{n,n}(\mathbb{K})$; $I \in M_n(\mathbb{K})$ – единичная матрица; $\operatorname{Sp} H$ – след матрицы $H \in M_n(\mathbb{K})$.

Рассмотрим билинейную стационарную дифференциальную систему с несколькими сосредоточенными и распределенными запаздываниями в состоянии:

$$
\begin{aligned}
\dot{x}(t) = {} & A_{00}x(t) + u_{01}A_{01}x(t) + \ldots + u_{0r_0}A_{0r_0}x(t) + \\
& + A_{10}x(t-h_1) + u_{11}A_{11}x(t-h_1) + \ldots + u_{1r_1}A_{1r_1}x(t-h_1) + \ldots \\
& + A_{s0}x(t-h_s) + u_{s1}A_{s1}x(t-h_s) + \ldots + u_{sr_s}A_{sr_s}x(t-h_s) + \\
& + \int_{-h_1}^{0} \big(C_{10}(\tau) + w_{11}(\tau)C_{11} + \ldots + w_{1q_1}(\tau)C_{1q_1}\big)x(t+\tau)\,d\tau + \ldots \\
& + \int_{-h_s}^{-h_{s-1}} \big(C_{s0}(\tau) + w_{s1}(\tau)C_{s1} + \ldots + w_{sq_s}(\tau)C_{sq_s}\big)x(t+\tau)\,d\tau, \quad t > 0,
\end{aligned}
\tag{1}
$$

с начальными условиями $x(\tau) = \zeta(\tau)$, $\tau \in [-h_s, 0]$; здесь $h_j > 0$ – постоянные запаздывания такие, что $0 = h_0 < h_1 < \ldots < h_s$; $\zeta \colon [-h_s, 0] \to \mathbb{K}^n$ – непрерывная функция; $x \in \mathbb{K}^n$ – вектор состояния; $u_j = \operatorname{col}(u_{j1}, \ldots, u_{jr_j}) \in \mathbb{K}^{r_j}$, $j = \overline{0, s}$, – векторы управления; $w_k(\tau) = \operatorname{col}\big(w_{k1}(\tau), \ldots, w_{kq_k}(\tau)\big) \in \mathbb{K}^{q_k}$, $k = \overline{1, s}$, – вектор-функции управления; $A_{j\nu} \in M_n(\mathbb{K})$, $j = \overline{0,s}$, $\nu = \overline{0,r_j}$; $C_{k0}\colon [-h_k, -h_{k-1}] \to M_n(\mathbb{K})$ – интегрируемые функции, $C_{k\mu} \in M_n(\mathbb{K})$, $k = \overline{1,s}$, $\mu = \overline{1,q_k}$.

Система (1) может быть записана в виде

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) = \sum_{j=0}^{s} \Big( A_{j0} x(t-h_j) + \sum_{\nu=1}^{r_j} u_{j\nu} A_{j\nu} x(t-h_j) \Big) + \\ + \sum_{k=1}^{s} \bigg( \int_{-h_k}^{-h_{k-1}} \Big( C_{k0}(\tau) + \sum_{\mu=1}^{q_k} w_{k\mu}(\tau) C_{k\mu} \Big) x(t+\tau)\, d\tau \bigg), \quad t > 0. \end{aligned} \tag{2}$$

Обозначим через $\varphi(\lambda)$ характеристическую функцию системы (2), т.е.

$$\begin{aligned} \varphi(\lambda) = \det \bigg[ \lambda I - \sum_{j=0}^{s} \Big( A_{j0} + \sum_{\nu=1}^{r_j} u_{j\nu} A_{j\nu} \Big) e^{-\lambda h_j} \\ - \sum_{k=1}^{s} \int_{-h_k}^{-h_{k-1}} \Big( C_{k0}(\tau) + \sum_{\mu=1}^{q_k} w_{k\mu}(\tau) C_{k\mu} \Big) e^{\lambda\tau}\, d\tau \bigg]. \end{aligned} \tag{3}$$

Множество $\sigma = \{\lambda \in \mathbb{C} : \varphi(\lambda) = 0\}$ нулей характеристической функции образует спектр системы (2). Если $\sigma \subset \{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}\lambda < 0\}$, то система (2) асимптотически устойчива. Спектр $\sigma$ системы (2) в общем случае состоит из бесконечного числа точек. Если характеристическая функция обращается в полином, то спектр $\sigma$ системы (2) является конечным множеством.

**Определение 1.** *Мы говорим, что для системы* (2) *разрешима задача назначения произвольного конечного спектра, если для любых чисел* $\gamma_i \in \mathbb{K}$, $i = \overline{1,n}$, *существуют постоянные векторы управления* $u_j \in \mathbb{K}^{r_j}$ ($j = \overline{0,s}$) *и интегрируемые вектор-функции управления* $w_k : [-h_k, -h_{k-1}] \to \mathbb{K}^{q_k}$ ($k = \overline{1,s}$) *такие, что характеристическая функция* (3) *удовлетворяет равенству*

$$\varphi(\lambda) = \lambda^n + \gamma_1 \lambda^{n-1} + \ldots + \gamma_n.$$

В работе [1] были получены достаточные условия разрешимости задачи назначения конечного спектра для системы (2), содержащей только сосредоточенные запаздывания и не содержащей распределенных запаздываний (т.е. в случае когда $C_{k\mu} \equiv 0$, $k = \overline{1,s}$, $\mu = \overline{0,q_k}$). В работе [2] были получены достаточные условия разрешимости задачи назначения конечного спектра для системы (2), содержащей только одно сосредоточенное и одно распределенное запаздывание ($s = 1$). Здесь результаты работ [1, 2] обобщаются на системы с несколькими сосредоточенными и распределенными запаздываниями.

Предположим, что коэффициенты системы (2) имеют следующий специальный вид: матрица $A_{00}$ имеет нижнюю форму Хессенберга с ненулевыми элементами первой наддиагонали; для некоторого $p \in \{1, \ldots, n\}$ первые $p-1$ строк и последние $n-p$ столбцов матриц $A_{j\nu}$, $j = \overline{0,s}$, $\nu = \overline{0,r_j}$ $\big((j,\nu) \neq (0,0)\big)$, и матриц $C_{k\mu}$, $k = \overline{1,s}$, $\mu = \overline{0,q_k}$, равны нулю, то есть

$$A_{00} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & \ldots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \ldots & \ldots & a_{n-1,n} \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix}, \qquad a_{i,i+1} \neq 0, \quad i = \overline{1,n-1}; \tag{4}$$

(5) $$A_{j\nu} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \widehat{A}_{j\nu} & 0 \end{bmatrix}, \quad \widehat{A}_{j\nu} \in M_{n-p+1,p}(\mathbb{K}), \quad j = \overline{0,s},\ \nu = \overline{0,r_j},\ (j,\nu) \neq (0,0),$$

(6) $$C_{k0}(\tau) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \widehat{C}_{k0}(\tau) & 0 \end{bmatrix}, \quad C_{k\mu} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \widehat{C}_{k\mu} & 0 \end{bmatrix},$$
$$\widehat{C}_{k0}(\tau), \widehat{C}_{k\mu} \in M_{n-p+1,p}(\mathbb{K}), \quad k = \overline{1,s},\ \mu = \overline{1,q_k},\ \tau \in [-h_k, -h_{k-1}].$$

По системе (2) построим матрицы $\Gamma_j \in M_{n,r_j}(\mathbb{K})$ $(j = \overline{0,s})$, $\Lambda_j \in M_{n,1}(\mathbb{K})$ $(j = \overline{1,s})$ и матрицы $\Phi_k \in M_{n,q_k}(\mathbb{K})$, $\Psi_k(\tau) \in M_{n,1}(\mathbb{K})$, $\tau \in [-h_k, -h_{k-1}]$, $k = \overline{1,s}$:

$$\Gamma_0 = \begin{bmatrix} \mathrm{Sp}\,(A_{01}) & \mathrm{Sp}\,(A_{02}) & \dots & \mathrm{Sp}\,(A_{0r_0}) \\ \mathrm{Sp}\,(A_{01}A_{00}) & \mathrm{Sp}\,(A_{02}A_{00}) & \dots & \mathrm{Sp}\,(A_{0r_0}A_{00}) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathrm{Sp}\,(A_{01}A_{00}^{n-1}) & \mathrm{Sp}\,(A_{02}A_{00}^{n-1}) & \dots & \mathrm{Sp}\,(A_{0r_0}A_{00}^{n-1}) \end{bmatrix},$$

$$\Gamma_j = \begin{bmatrix} \mathrm{Sp}\,(A_{j1}) & \mathrm{Sp}\,(A_{j2}) & \dots & \mathrm{Sp}\,(A_{jr_j}) \\ \mathrm{Sp}\,(A_{j1}A_{00}) & \mathrm{Sp}\,(A_{j2}A_{00}) & \dots & \mathrm{Sp}\,(A_{jr_j}A_{00}) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathrm{Sp}\,(A_{j1}A_{00}^{n-1}) & \mathrm{Sp}\,(A_{j2}A_{00}^{n-1}) & \dots & \mathrm{Sp}\,(A_{jr_j}A_{00}^{n-1}) \end{bmatrix},$$

$$\Lambda_j = \begin{bmatrix} \mathrm{Sp}\,(A_{j0}) \\ \mathrm{Sp}\,(A_{j0}A_{00}) \\ \dots \\ \mathrm{Sp}\,(A_{j0}A_{00}^{n-1}) \end{bmatrix},$$

$$\Phi_k = \begin{bmatrix} \mathrm{Sp}\,(C_{k1}) & \mathrm{Sp}\,(C_{k2}) & \dots & \mathrm{Sp}\,(C_{kq_k}) \\ \mathrm{Sp}\,(C_{k1}A_{00}) & \mathrm{Sp}\,(C_{k2}A_{00}) & \dots & \mathrm{Sp}\,(C_{kq_k}A_{00}) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathrm{Sp}\,(C_{k1}A_{00}^{n-1}) & \mathrm{Sp}\,(C_{k2}A_{00}^{n-1}) & \dots & \mathrm{Sp}\,(C_{kq_k}A_{00}^{n-1}) \end{bmatrix},$$

$$\Psi_k(\tau) = \begin{bmatrix} \mathrm{Sp}\,\big(C_{k0}(\tau)\big) \\ \mathrm{Sp}\,\big(C_{k0}(\tau)A_{00}\big) \\ \dots \\ \mathrm{Sp}\,\big(C_{k0}(\tau)A_{00}^{n-1}\big) \end{bmatrix}.$$

Построим матрицы $\Delta_j = [\Gamma_j, \Lambda_j] \in M_{n,r_j+1}(\mathbb{K})$ $(j = \overline{1,s})$ и матрицы $\Theta_k(\tau) = [\Phi_k, \Psi_k(\tau)] \in M_{n,q_k+1}(\mathbb{K})$, $\tau \in [-h_k, -h_{k-1}]$, $k = \overline{1,s}$.

**Теорема 1.** *Пусть матрицы системы* (2) *имеют специальный вид* (4), (5), (6). *Тогда задача назначения произвольного конечного спектра для системы* (2) *разрешима в том и только в том случае, если выполнены следующие равенства:*

(7) $$\mathrm{rank}\,\Gamma_0 = n,$$
(8) $$\mathrm{rank}\,\Gamma_j = \mathrm{rank}\,\Delta_j, \quad j = \overline{1,s},$$
(9) $$\mathrm{rank}\,\Phi_k = \mathrm{rank}\,\Theta_k(\tau) \quad \text{п.в. } \tau \in [-h_k, -h_{k-1}], \quad k = \overline{1,s}.$$

**Следствие 1.** *Пусть матрицы системы* (2) *имеют специальный вид* (4), (5), (6). *Предположим, что выполнены условия* (7), (8), (9). *Тогда система* (2) *экспоненциально стабилизируема.*

Рассмотрим пример, илюстрирующий теорему 1. Пусть $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $n = 3$, $s = 2$, $p = 2$, $r_0 = 3$, $r_1 = 2$, $r_2 = 2$, $q_1 = 3$, $q_2 = 2$, $0 < h_1 < h_2$, и матрицы системы (2) имеют следующий вид:

$$
\begin{aligned}
&A_{00}=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{bmatrix}, \quad A_{01}=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&1&0\\-1&0&0\end{bmatrix}, \quad A_{02}=\begin{bmatrix}0&0&0\\1&0&0\\0&1&0\end{bmatrix},\\
&A_{03}=\begin{bmatrix}0&0&0\\-1&-1&0\\0&2&0\end{bmatrix}, \quad A_{10}=\begin{bmatrix}0&0&0\\2&-1&0\\2&-2&0\end{bmatrix}, \quad A_{11}=\begin{bmatrix}0&0&0\\-1&1&0\\0&-1&0\end{bmatrix},\\
&A_{12}=\begin{bmatrix}0&0&0\\-1&1&0\\-1&0&0\end{bmatrix}, \quad A_{20}=\begin{bmatrix}0&0&0\\2&1&0\\1&0&0\end{bmatrix}, \quad A_{21}=\begin{bmatrix}0&0&0\\1&0&0\\1&-1&0\end{bmatrix},\\
&A_{22}=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&-1&0\\0&-2&0\end{bmatrix}, \quad C_{10}(t)=\begin{bmatrix}0&0&0\\2&-4\sin t&0\\0&0&0\end{bmatrix}, \quad C_{11}=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&1&0\\1&0&0\end{bmatrix},\\
&C_{12}=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&1&0\\-1&-1&0\end{bmatrix}, \quad C_{13}=\begin{bmatrix}0&0&0\\1&0&0\\0&1&0\end{bmatrix}, \quad C_{20}(t)=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\\cos t&0&0\end{bmatrix},\\
&C_{21}=\begin{bmatrix}0&0&0\\1&-1&0\\0&0&0\end{bmatrix}, \quad C_{22}=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&1&0\\1&-1&0\end{bmatrix}.
\end{aligned} \tag{10}
$$

Матрицы (10) системы (2) имеют специальный вид (4), (5), (6). Построим матрицы $\Gamma_0$, $\Gamma_1$, $\Gamma_2$, $\Lambda_1$, $\Lambda_2$, $\Phi_1$, $\Phi_2$, $\Psi_1(\tau)$, $\Psi_2(\tau)$, $\Delta_1$, $\Delta_2$, $\Theta_1(\tau)$, $\Theta_2(\tau)$:

$$
\Gamma_0=\begin{bmatrix}1&0&-1\\0&2&1\\-1&0&0\end{bmatrix}, \quad \Gamma_1=\begin{bmatrix}1&1\\-2&-1\\0&-1\end{bmatrix}, \quad \Gamma_2=\begin{bmatrix}0&-1\\0&-2\\1&0\end{bmatrix},
$$

$$
\Lambda_1=\begin{bmatrix}-1\\0\\2\end{bmatrix}, \quad \Lambda_2=\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix}, \quad \Phi_1=\begin{bmatrix}1&1&0\\0&-1&2\\1&-1&0\end{bmatrix},
$$

$$
\Phi_2=\begin{bmatrix}-1&1\\1&-1\\0&1\end{bmatrix}, \quad \Psi_1(\tau)=\begin{bmatrix}-4\sin\tau\\2\\0\end{bmatrix}, \quad \Psi_2(\tau)=\begin{bmatrix}0\\0\\\cos\tau\end{bmatrix},
$$

$$
\Delta_1=\begin{bmatrix}1&1&-1\\-2&-1&0\\0&-1&2\end{bmatrix}, \quad \Delta_2=\begin{bmatrix}0&-1&1\\0&-2&2\\1&0&1\end{bmatrix},
$$

$$
\Theta_1(\tau)=\begin{bmatrix}1&1&0&-4\sin\tau\\0&-1&2&2\\1&-1&0&0\end{bmatrix}, \quad \Theta_2(\tau)=\begin{bmatrix}-1&1&0\\1&-1&0\\0&1&\cos\tau\end{bmatrix}.
$$

Условия (7), (8), (9) выполнены. Следовательно, по теореме 1 для системы (2) с матрицами (10) разрешима задача назначения произвольного конечного спектра. Пусть, к примеру, целевой полином есть $\psi(\lambda) = (\lambda+1)^3$. Вычислим векторы управления $u_0 \in \mathbb{R}^3$, $u_1, u_2 \in \mathbb{R}^2$, $w_1(\tau) \in \mathbb{R}^3$, $w_2(\tau) \in \mathbb{R}^2$, используя теорему 1; получим:

$$
\begin{gathered}
u_0=\operatorname{col}(2,-4,5), \quad u_1=\operatorname{col}(-1,2), \quad u_2=\operatorname{col}(-1,1),\\
w_1(\tau)=\operatorname{col}(2\sin\tau, 2\sin\tau, \sin\tau-1), \quad w_2(\tau)=\operatorname{col}(-\cos\tau,-\cos\tau).
\end{gathered} \tag{11}
$$

Система (2) с матрицами (10) и управлением (11) имеет вид

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -9 & -3 & 1 \\ -1 & 6 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} x(t-h_1) + \\ + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} x(t-h_2) + \int_{-h_1}^{0} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1+\sin\tau & 0 & 0 \\ 0 & -1-\sin\tau & 0 \end{bmatrix} x(t+\tau)\,d\tau + \\ + \int_{-h_2}^{-h_1} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -\cos\tau & 0 & 0 \\ 0 & \cos\tau & 0 \end{bmatrix} x(t+\tau)\,d\tau \tag{12}$$

Вычислим характеристическую функцию системы (12), получим

$$\varphi(\lambda) = \lambda^3 + 3\lambda^2 + 3\lambda + 1.$$

В частности, система (12) является экспоненциально устойчивой.

Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования РФ в рамках государственного задания, проект FEWS-2024-0009.

## Список литературы

1. Зайцев В.А., Ким И.Г., Хартовский В.Е. Задача назначения конечного спектра для билинейных систем с несколькими запаздываниями // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2019. Т. 29, Вып. 3. С. 319–331.
2. Зайцев В.А., Ким И.Г. Назначение конечного спектра и стабилизация билинейных систем с сосредоточенным и распределенным запаздываниями // Дифференциальные уравнения. 2023. Т. 59, № 8. С. 1148–1151.