УДК 517.977

К ВОПРОСУ ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ПЕРЕКЛЮЧАЕМОЙ АФФИННОЙ СИСТЕМЫ

П.А. Крылов
МГУ им. М.В. Ломоносова
Россия, 119991, Москва, Ленинские горы, 1
E-mail: pavel@leftsystem.ru

А.С. Фурсов
МГУ им. М.В. Ломоносова
Россия, 119991, Москва, Ленинские горы, 1
E-mail: fursov@cs.msu.ru

Ключевые слова: управляемые переключаемые системы, кусочно-аффинные системы, устойчивость динамических систем, граф дискретных состояний.

Аннотация: Рассматривается задача об устойчивости нулевого положения равновесия переключаемой аффинной системы, замкнутой линейной статической обратной связью по состоянию. Введено понятие допустимого управления для заданного множества переключающих сигналов и получено конструктивное условие проверки указанного свойства для произвольной линейной обратной связи. Сформулировано достаточное условие устойчивости нулевого положения равновесия переключаемой аффинной системы, замкнутой допустимым управлением

1. Введение

Как известно [1; 2, с. 10], кусочно-линейные системы могут быть эффективно использованы для аппроксимации нелинейных аффинных управляемых систем вида

$$\dot{x} = g(x) + p(x)u, \quad x \in \mathbb{R}^n \tag{1}$$

с достаточно гладкими функциями $g(x)$, $p(x)$ и скалярным управлением u. Под кусочно-линейной системой обычно понимают динамическую систему, которая имеет различную линейную динамику в разных областях непрерывного пространства состояний. Если говорить более точно, то аппроксимирующие линейные системы имеют вид

$$\dot{x} = A_i x + v_i + b_i u, \quad x \in X_i, \ i = 1, \ldots, m, \tag{2}$$

и, фактически, являются аффинными, поэтому далее будем называть кусочно-линейные аппроксимации кусочно-аффинными. Здесь множества X_i образуют некоторое разбиение пространства состояний $\mathbb{R}^n$ системы (1). Как правило, эти множества представляют собой замкнутые выпуклые многогранники, которые могут пересекаться только своими гранями. Под выпуклым многогранником понимаем выпуклое множество, ограниченное некоторым числом гиперплоскостей. При этом, в общем случае, многогранник может быть неограниченным. Далее замкнутые выпуклые многогранники разбиения будем обозначать через $\overline{M}_i$.

Исследованию устойчивости нулевого положения равновесия кусочно-аффинных систем посвящено достаточно большое количество работ различных авторов (см., например, библиографию в работе [2]). При этом, как правило, условия устойчивости формулируются на основе метода функций Ляпунова, в частности, кусочно-квадратичных функций Ляпунова. Необходимо отметить, что устойчивость положения равновесия кусочно-аффинной системы (2) существенно зависит от разбиения пространства $\mathbb{R}^n$ на многогранники $\overline{M}_i$. Заметим, что замкнутую кусочно-аффинную систему (2) можно рассматривать как переключаемую систему [6, с. 5], для которой переключающий сигнал $\sigma(x)$ является кусочно-постоянной функцией состояния. При этом значение переключающего сигнала постоянно внутри каждого многогранника разбиения и различно для внутренних точек разных многогранников, т.е. $\sigma(x) = i$, если $x \in M_i$ (через M_i обозначаем множество внутренних точек многогранника $\overline{M}_i$). С этой точки зрения разбиение пространства состояний на m многогранников можно определить путем задания соответствующего переключающего сигнала. Считаем, что $\cup_{i=1}^m \overline{M_i} = \mathbb{R}^n$ и $\forall i, j\ M_i \cap M_j = \varnothing$.

Пусть теперь задано семейство открытых аффинных режимов и некоторое множество S переключающих сигналов, задающих различные разбиения пространства состояний $\mathbb{R}^n$. Тогда мы получим управляемую переключаемую аффинную систему

$$\dot{x} = A_\sigma x + v_\sigma + b_\sigma u, \quad \sigma \in S,\ v_1 = 0, \tag{3}$$

для которой можно поставить задачу анализа устойчивости нулевого положения равновесия при ее замыкании заданной обратной связью $u = u(x)$ ($u(0) = 0$). Именно эта задача и является предметом исследования настоящей работы.

2. Основные определения и постановка задачи.

Рассмотрим разбиение евклидова пространства $\mathbb{R}^n$ на m замкнутых выпуклых многогранников $\overline{M}_i$ ($i = \overline{1, m}$). При этом считаем, что $0 \in M_1$. Пусть $P_{ij} = \{x \in \mathbb{R}^n \,|\, \langle n_{ij}, x\rangle = d_{ij}\}$ – плоскость, содержащая общую грань многогранников $\overline{M}_i$ и $\overline{M}_j$. Здесь n_{ij} – вектор нормали к плоскости P_{ij}, направленный в сторону многогранника $\overline{M}_j$, $d_{ij} \in \mathbb{R}$, а $\langle\cdot, \cdot\rangle$ – стандартное скалярное произведение в $\mathbb{R}^n$.

Далее, рассмотрим всевозможные наборы чисел $(\alpha_1 \dots \alpha_p)$, $\alpha_i \in \{1, \dots, m\}$, $p \leqslant m$. Каждому такому набору сопоставим множество $\overline{\Gamma}_{\alpha_1\dots\alpha_p} = \bigcap_{i=1}^p \overline{M}_{\alpha_i}$. Пусть $\Gamma_{\alpha_1\dots\alpha_p} = \overline{\Gamma}_{\alpha_1\dots\alpha_p} \setminus \bigcup_{k\neq\alpha_1,\dots,\alpha_p} \overline{M}_k$. Заметим, что

1) в общем случае, некоторые множества $\Gamma_{\alpha_1\dots\alpha_p}$ могут быть пустыми,

2) $\Gamma_{\alpha_1\dots\alpha_p} = \Gamma_{\beta_1\dots\beta_p}$, если набор $(\beta_1 \dots \beta_p)$ может быть получен некоторой перестановкой чисел из набора $(\alpha_1 \dots \alpha_p)$,

3) любые два различных множества $\Gamma_{\alpha_1\dots\alpha_p}$ и $\Gamma_{\beta_1\dots\beta_r}$ не пересекаются.

Обозначим через N набор нормалей n_{ij} и через D набор правых частей d_{ij}. Теперь вернемся к переключаемой аффинной системе (3), для которой переключающий сигнал $\sigma(x;N,D) : \mathbb{R}^n \to I = \{1,\dots,m\}$ – кусочно-постоянная функция, задаваемая парой (N,D) и принимающая постоянное значение i на каждом открытом выпуклом многограннике M_i. Значение функции $\sigma(x;N,D)$ в каждой точке $x \notin \Gamma(N;D)$ определяет активный режим (подсистему) функционирования (A_i,b_i,v_i) переключаемой системы (3), описываемый аффинной системой $\dot{x} = A_i x + v_i + b_i u$. Для того чтобы доопределить значения переключающего сигнала на множестве граничных точек необходимо задать для системы (3) конкретный алгоритм управления u. Замкнем систему (3) линейной обратной связью $u = -\theta^T x$

$$\dot{x} = A_\sigma x + v_\sigma - b_\sigma \theta^T x, \quad \sigma \in S. \tag{4}$$

Пусть $\overline{A}_i = A_i - b_i\theta^T$. Рассматриваемую обратную связь будем считать *допустимой*, если выполнено следующее условие.

Условие 1. *Для любой* $\sigma\in S$ *и любого набора* $(\alpha_1,\dots,\alpha_p)$ *такого, что* $\Gamma_{\alpha_1,\dots,\alpha_p} \neq \varnothing$ *верно, что для любого* $x \in \Gamma_{\alpha_1,\dots,\alpha_p}$ *существует единственный номер* $\alpha_i \in \alpha_1,...,\alpha_p$ *такой, что для любого номера* $\alpha_k \in \{\alpha_1,...,\alpha_p\}$*, для которого* $n_{\alpha_i\alpha_k} \neq 0$*, выполняется неравенство* $n_{\alpha_i\alpha_k}, \overline{A}_{\alpha_i}x + v_{\alpha_i} < 0$.

При выполнении условия 1 в каждой граничной точке существует единственный способ выбрать режим α_i таким образом, чтобы векторное поле было направлено строго внутрь соответствующего многогранника. В этом случае можно естественным образом доопределить значения $\sigma(x)$ на границе, положив $\sigma(x) = \alpha_i$.

Теперь остается заметить, что при предложенном доопределении переключающих сигналов решение замкнутой переключаемой системы (4) для любого начального условия $x(0)$ и любого переключающего сигнала $\sigma \in S$ существует в смысле Филлипова [4, с. 40, 59] и единственно.

Будем говорить, что нулевое решение замкнутой переключаемой системы (4) *глобально равномерно устойчиво*, если для любого фиксированного $\sigma \in S$ нулевое решение соответствующей кусочно-аффинной системы глобально асимптотически устойчиво.

Постановка задачи. Требуется для заданной допустимой обратной связи $u = -\theta^T x$ исследовать нулевое решение замкнутой системы (4) на глобальную равномерную устойчивость.

Сразу же отметим, что допустимость обратной связи может быть конструктивно проверена при помощи следующего критерия

Теорема 1. *Линейная обратная связь* $u = -\theta^T x$ *является допустимым управлением для системы* (3) *тогда и только тогда, когда для каждого* $\sigma \in S$ *и каждого набора* $(\alpha_1 \dots \alpha_p)$ *такого, что* $\alpha_1 < \dots < \alpha_p$ *выполнены следующие условия:*

– *либо* $\Gamma_{\alpha_1\dots\alpha_p} = \varnothing$

– *либо существует единственный номер* $\alpha_i \in \{\alpha_1,\dots,\alpha_p\}$ *такой, что для каждого* $\alpha_k \in L^{\alpha_i}_{\alpha_1,\dots,\alpha_p} = \{\alpha_l \in \{\alpha_1\dots\alpha_p\} : l \neq i, n_{\alpha_i\alpha_l} \neq 0\}$ *неравенство* $\langle \overline{A}^T_{\alpha_i} n_{\alpha_i\alpha_k}, x\rangle + \langle n_{\alpha_i\alpha_k}, v_{\alpha_i}\rangle \geqslant 0$ *не имеет решений при* $x \in \Gamma_{\alpha_1\dots\alpha_p}$.

Заметим, что в силу предложенного описания разбиения пространства на многогранники путем задания ограничивающих плоскостей, условия вида $x \in \Gamma_{\alpha_1\dots\alpha_p}$ сводятся к системе линейных неравенств с коэффициентами из N и D.

3. Граф дискретных состояний

Рассматриваемая замкнутая система (4) при фиксированном переключающем сигнале $\sigma \in S$ фактически является гибридной системой, для описания которой можно использовать так называемый граф дискретных состояний. Таким образом, каждому переключающему сигналу $\sigma \in S$ системы (4), замкнутой допустимым управлением, сопоставим ориентированный граф, вершинами которого являются номера режимов этой системы, а наличие ребра $i \to j$ будет означать существование траектории соответствующей системы, при движении вдоль которой режим i сменяется режимом j. Построить граф можно опираясь на следующую теорему.

Теорема 2. *Пусть система* (4) *замкнута допустимым управлением. Тогда траектория, при движении вдоль которой режим* γ *сменяется режимом* δ*, существует тогда и только тогда, когда найдется набор* $(\alpha_1, \ldots, \alpha_p)$ *такой, что*

1) $\exists i, j \ : \ \alpha_i = \gamma, \ \alpha_j = \delta;$ *2)* $\Gamma_{\alpha_1,\ldots,\alpha_p} \neq \varnothing;$ *3)* $\sigma(\Gamma_{\alpha_1,\ldots,\alpha_p}; N, D) = \delta;$

4) существуют $q_1, \ldots, q_r \in \{1, \ldots, n\}$ *такие, что совместна система*

$$\begin{cases} x \in \Gamma_{\alpha_1,\ldots,\alpha_p}, \\ \langle n_{\gamma k_j}, \overline{A}_\gamma x + v_\gamma \rangle = 0, \ldots, \langle n_{\gamma k_j}, \overline{A}_\gamma^{q_j-1} x + \overline{A}_\gamma^{q_j-2} v_\gamma \rangle = 0, \\ (-1)^{q_j} \langle n_{\gamma k_j}, \overline{A}_\gamma^{q_j} x + \overline{A}_\gamma^{q_j-1} v_\gamma \rangle < 0, \ j = \overline{1, r}. \end{cases}$$

4. Достаточное условие устойчивости

Для системы (4) с известным графом дискретных состояний достаточное условие глобальной равномерной устойчивости нулевого решения дает следующая теорема

Теорема 3. *Пусть для системы* (4)*, замкнутой допустимым управлением* $u = -\theta^T x$ *все матрицы* $A_i - b_i\theta^T$ $(i = \overline{1, m})$ *не имеют собственных значений на мнимой оси и для любого переключающего сигнала* $\sigma \in S$ *соответствующий ориентированный граф* $G(\sigma)$ *слабо-связный и не содержит циклов. Пусть подсистема системы* (4) *с индексом 1 асимптотически устойчива, а для остальных режимов* $(i = \overline{2, m})$ *и для любого* $\sigma \in S$ *выполнены следующие условия:*

1) матрица $A_i - b_i\theta^T$ *устойчива или область функционирования режима* i *(многогранник* M_i*) ограничена;*

2) $x_0^i \notin \Gamma(N, D)$*, где* $x_0^i \equiv (A_i - b_i\theta^T)^{-1} v_i$ *– стационарное решение аффинной системы, являющейся* i*-м режимом переключаемой системы* (4)*;*

3) $\sigma(x_0^i; N, D) \neq i$.

Тогда нулевое решение системы (4) *глобально равномерно устойчиво.*

5. Обобщение для линейной параметризации S

Предположим, что множество возможных пар (N, D) устроено таким образом, что N – фиксированный набор, а D допускает линейную параметризацию в виде

$$d_{ij} = d_{ij}^0 + d_{ij}^1 \kappa_1 + \ldots + d_{ij}^r \kappa_r, \quad d_{ij}^k \in \mathbb{R}, \ k = 1, \ldots, r,$$

где вектор $\kappa = (\kappa_1, \ldots, \kappa_r)$ удовлетворяет линейным ограничениям $\Phi\kappa \leqslant \varphi, \Phi \in \mathbb{R}^{l \times r}$, $\varphi \in \mathbb{R}^l$ для некоторого натурального l. В таком случае условия вида $x \in$

$\Gamma_{\alpha_1\ldots\alpha_p}(\kappa)$ также сводятся к системе линейных неравенств с коэффициентами из N и D. При этом, удается сформулировать критерий о допустимых управлениях для множества переключающих сигналов S, который является прямым следствием теоремы 1.

Теорема 4. *Линейная обратная связь $u = -\theta^T x$ является допустимым управлением для системы (3) тогда и только тогда, когда для каждого набора $(\alpha_1 \ldots \alpha_p)$ выполнены следующие условия:*

– либо система линейных неравенств $\Phi\kappa \leqslant \varphi, x \in \Gamma_{\alpha_1\ldots\alpha_p}(\kappa)$ не имеет решений;

– либо существует единственный номер $\alpha_i \in \{\alpha_1, \ldots, \alpha_p\}$ такой, что для каждого $\alpha_k \in L^{\alpha_i}_{\alpha_1,\ldots,\alpha_p}$ не имеет решений система линейных неравенств

$$\Phi\kappa \leqslant \varphi,\ x \in \Gamma_{\alpha_1\ldots\alpha_p}(\kappa),\ \langle \overline{A}^T_{\alpha_i} n_{\alpha_i\alpha_k}, x\rangle + \langle n_{\alpha_i\alpha_k}, v_{\alpha_i}\rangle \geqslant 0$$

Для множества переключающих сигналов с предложенной параметризацией теорема 2 о построении графа дискретных состояний обобщается аналогичным образом, однако дополнительно возникает условие инвариантности графа относительно параметра κ. Это условие сводится к проверке совместности некоторой системы линейных неравенств в каждой угловой точке компакта $\Phi\kappa \leqslant \varphi$.

6. Заключение

Рассмотренная в работе задача может возникать в случае управления системами с неопределенностями, например, когда значения функций $g(x)$, $p(x)$ и касательные гиперплоскости для функции $g(x)$ нелинейной системы (1) известны лишь для некоторого конечного множества точек $\{x_1, \ldots, x_m\}$ в пространстве состояний. В этом случае кусочно-аффинная аппроксимация может быть построена лишь по указанному набору узлов, при этом выбор разбиения пространства состояний на области активности построенных аффинных режимов становится неоднозначным, в связи с чем, в таком случае, естественно рассматривать кусочно-аффинную аппроксимацию как переключаемую аффинную систему (3) на некотором множестве S переключающих сигналов. Для такой постановки было сформулированно достаточное условие глобальной равномерной устойчивости нулевого решения кусочно-аффинной аппроксимации, которое сводится к поверке совместности конечного числа систем линейных неравенств.

Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 22-21-00162).

Список литературы

1. Rewienski M., White J. Model order reduction for nonlinear dynamical systems based on trajectory piecewise-linear approximations // Linear Algebra and its Applications. 2006. Vol. 415. 426–454.
2. Johansson M. Piecewise linear control system. Berlin, Heidelberg: Springer, 2003.
3. Филиппов А. Ф. Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. М.: Наука, 1985.
4. Li C., Chen G., Liao X. Stability of piecewise affine systems with application to chaos stabilization // Chaos. 2007. Vol. 17. 023123.