УДК 531.36:534.1

# АНАЛИЗ РАЗРЫВНЫХ МОДЕЛЕЙ ФАЗОВОЙ АВТОПОДСТРОЙКИ

**Н.В. Кузнецов**
*Санкт-Петербургский государственный университет*
Россия, 117997, Санкт-Петербург, Университетский пр., 28
E-mail: nkuznetsov239@gmail.com

**М.Ю. Лобачев**
*Санкт-Петербургский государственный университет*
Россия, 117997, Санкт-Петербург, Университетский пр., 28
E-mail: mlobachev64@gmail.com

**Ключевые слова:** фазовая автоподстройка частоты, PLL, разрывная характеристика фазового детектора, полоса захвата, полоса быстрого захвата.

**Аннотация:** В данной работе в рамках теории систем дифференциальных уравнений с разрывной правой частью рассмотрена задача определения полос удержания, захвата и быстрого захвата для системы управления фазовой синхронизацией с пилообразной характеристикой фазового детектора. На примерах системы фазовой автоподстройки второго порядка с идеальным интегрирующим фильтром и схемы Костаса с квадратурной фазовой манипуляцией показаны трудности, возникающие при определении решения соответствующей математической модели в точках разрыва, и возможности аналитических методов анализа таких моделей.

## 1. Введение

Системы фазовой автоподстройки (ФАП) – нелинейные системы управления, широко используемые в спутниковой навигации [1], гироскопах [2, 3], беспроводной связи [4–6] и других приложениях [7–12]. Одной из основных задач ФАП является синхронизация выходного сигнала подстраиваемого генератора (ПГ) с входным периодическим сигналом [13–15]. Несмотря на то, что математическая модель ФАП с пилообразной характеристикой фазового детектора описывается системой дифференциальных уравнений с разрывной правой частью, теория дифференциальных включений [16–19], используемая для строгого определения решений в точках разрыва правой части, редко применяется в инженерной литературе для описания таких моделей ФАП. Так, в работах [20–27] при анализе полосы захвата не обсуждаются описание векторного поля в точках разрыва и возможная неединственность решений.

Аналогичные проблемы возникают при анализе моделей схемы Костаса с квадратурной фазовой манипуляцией, которая является модификацией схемы фазовой автоподстройки и используется в системах связи и управления для восстановления несущей сигналов и квадратурной фазовой манипуляции (QPSK) [28].

## 2. Основная часть

Поведение системы ФАП на рис. 1 с идеальным интегрирующим фильтром первого порядка описывается системой дифференциальных уравнений

$$
\begin{aligned}
&\dot{x} = v_e(\theta_e), \\
&\dot{\theta}_e = \omega_e^{\text{free}} - \frac{K_{\text{vco}}}{\tau_1}\left(x + \tau_2 v_e(\theta_e)\right),
\end{aligned} \tag{1}
$$

где $x(t)$ – состояние фильтра, $\theta_e(t)$ – расфазировка, $v_e(\cdot)$ – характеристика фазового детектора, $\tau_{1,2} > 0$ – параметры фильтра нижних частот, $K_{\text{vco}} > 0$ – коэффициент усиления ПГ, $\omega_e^{\text{free}}$ – разность входной частоты и свободной частоты ПГ.

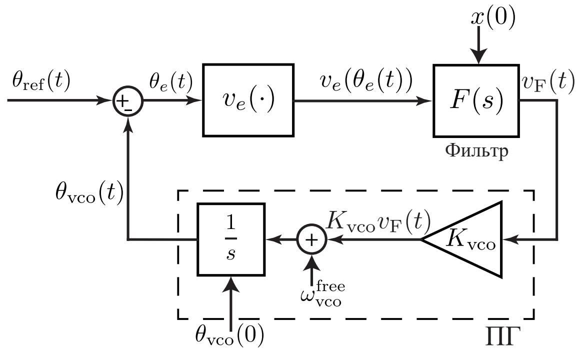


Рис. 1. Модель фазовой автоподстройки частоты в пространстве фаз сигналов

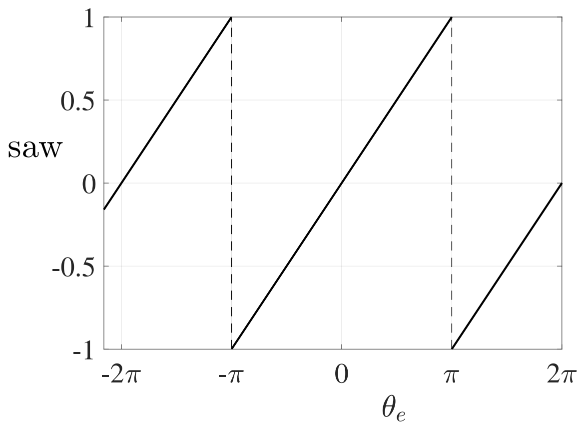


Рис. 2. Пилообразная характеристика фазового детектора

При рассмотрении пилообразной характеристики фазового детектора (см. рис. 2), правая часть уравнений (1) терпит разрыв в точках $\theta_e = \pi m$, $m \in \mathbb{Z}$.

Также разрывная кусочно-гладкая характеристика фазового детектора возникает в усредненной модели схемы Костаса с квадратурной манипуляцией (QPSK) [28]. На рис. 3 представлена QPSK-схема Костаса в пространстве сигналов. Здесь $\otimes$ – перемножитель, $m_{1,2}(t)$ – сигналы данных, $\sin(\theta_{1,2}(t)), \cos(\theta_{1,2}(t))$ – высокочастотные колебания с фазами $\theta_1(t)$ и $\theta_2(t)$, ФНЧ1, ФНЧ2 и ФИЛЬТР – линейные фильтры нижних частот с начальными состояниями $x_1(0)$, $x_2(0)$ и $x_(0)$, соответственно, соотношение между входом $\xi(t)$ и выходом $\sigma(t)$ ограничителя имеет вид $\sigma(t) = \text{sign}(\xi(t))$, вход $\varphi(t)$ фильтра ФИЛЬТР имеет вид $\text{sign}(g_1(t))g_2(t) - \text{sign}(g_2(t))g_1(t)$, закон изменения частоты подстраиваемого генератора предполагается линейным, блок 90◦ задерживает фазу сигнала на $\frac{\pi}{2}$.

Впервые исследования радиофизических систем с разрывной правой частью проводились Железцовым Н.А. [29] до появления развитой математической теории

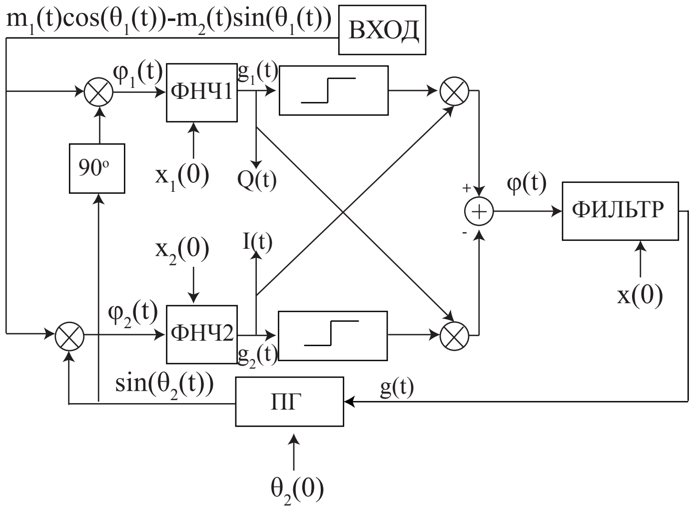


Рис. 3. QPSK-схема Костаса.

дифференциальных включений [16, 17]. Далее для определения решений разрывной системы (1) мы используем подход Филиппова [17] и рассматриваем решение как абсолютно-непрерывную вектор-функцию, удовлетворяющую дифференциальному включению

$$
\begin{aligned}
&\dot{x} \in \psi(\theta_e),\\
&\dot{\theta}_e \in \omega_e^{\text{free}} - \frac{K_{\text{vco}}}{\tau_1}\left(x + \tau_2\psi(\theta_e)\right),
\end{aligned}
\tag{2}
$$

где

$$
\psi(\theta_e) = \begin{cases} \operatorname{saw}(\theta_e), & \theta_e \neq \pi + 2\pi m,\\ [-1,\ 1], & \theta_e = \pi + 2\pi m. \end{cases} \tag{3}
$$

Здесь $\psi(\pi) = [-1,\ 1]$ соответствует минимальному ограниченному выпуклому множеству, такому что $\lim\limits_{\theta_e \to \pi - 0} \operatorname{saw}(\theta_e) \in \psi(\pi)$, $\lim\limits_{\theta_e \to \pi + 0} \operatorname{saw}(\theta_e) \in \psi(\pi)$.

Из анализа дифференциального включения (2) следует существование отрезка скользящих режимов на периоде и неединственность траекторий с начальными данными на этих отрезках. Для доказательства глобальной устойчивости и бесконечности полосы захвата исследуемой модели ФАП рассмотрим непрерывную функцию Ляпунова в форме Лурье-Постникова:

$$
V(x,\ \theta_e) = \frac{K_{\text{vco}}}{2\tau_1}\left(x - \frac{\tau_1 \omega_e^{\text{free}}}{K_{\text{vco}}}\right)^2 + \int\limits_0^{\theta_e} \operatorname{saw}(\sigma) d\sigma, \tag{4}
$$

которая является периодической: $V(x,\ \theta_e + 2\pi) = V(x,\ \theta_e)\quad \forall x \in \mathbb{R},\ \forall \theta_e \in \mathbb{R}$, а также удовлетворяет условию радиальной неограниченности по непериодическим координатам: $V(x,\ \theta_e) + \theta_e^2 \to +\infty$ при $|x| + |\theta_e| \to +\infty$. Вне поверхностей разрыва $S_m = \{(x,\ \theta_e) \mid x \in \mathbb{R},\ \theta_e = \pi + 2\pi m\}$, $m \in \mathbb{Z}$ функция $V(x,\ \theta_e)$ гладкая и ее производные в силу системы (1) отрицательна:

$$
\dot{V}(x,\ \theta_e) = -\frac{K_{\text{vco}}\tau_2}{\tau_1}\left(\operatorname{saw}(\theta_e)\right)^2 < 0,\ \theta_e \neq \pi m,\ m \in \mathbb{Z}.
$$

Заметим, что из вида системы следует, что не существует временного интервала $(t_1,\ t_2)$ такого, что $\theta_e(t) \equiv 2\pi m,\ m \in \mathbb{Z}$ при $t \in (t_1,\ t_2)$. Следовательно, $V(x(t_1),\ \theta_e(t_1)) < V(x(t_2),\ \theta_e(t_2))$ при $t_1 < t_2$. На решениях скользящего режима, удовлетворяющих $\dot{x} = \frac{1}{\tau_2}\left(\frac{\tau_1\omega_e^{\text{free}}}{K_{\text{vco}}} - x\right)$, функция $V(x,\ \theta_e)$ имеет вид

$$V(x,\ \theta_e) = \frac{K_{\text{vco}}}{2\tau_1}\left(x - \frac{\tau_1\omega_e^{\text{free}}}{K_{\text{vco}}}\right)^2 + \frac{\pi}{2}$$

и является невозрастающей. Следовательно, для любого решения включения (2) функция (4) является невозрастающей и $V(x(t),\ \theta_e(t)) \equiv V(x(0),\ \theta_e(0))$ влечет $(x(t),\ \theta_e(t)) \equiv\ (x(0),\ \theta_e(0))$. Таким образом, функция (4) удовлетворяет теореме Леонова для анализа глобальной устойчивости периодических дифференциальных включений [30–32] и позволяет доказать бесконечность полосы захвата исследуемой модели ФАП для любых параметров $K_{\text{vco}} > 0$, $\tau_1 > 0$, $\tau_2 > 0$:

$$[0,\ \omega_p) = [0,\ +\infty).$$

Поскольку при ресинхронизации траектории системы (1) не попадают на отрезки скользящих режимов при любых частотах $\omega_e^{\text{free}}$, отличных от частоты быстрого захвата $\omega_e^{\text{free}} = \omega_l$, то проблема неединственности решений не влияет на определение полосы быстрого захвата.

# 3. Заключение

В данной работе были показаны возможности аналитических методов анализа систем дифференциальных уравнений с разрывной правой частью для решения проблем определения полос удержания, захвата и быстрого захвата в системе ФАП с пилообразной характеристикой фазового детектора.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 22-11-00172).

# Список литературы

1. Kaplan E., Hegarty C. Understanding GPS/GNSS: Principles and Applications / 3rd edition. Artech House, 2017.
2. Aaltonen L., Halonen K. An analog drive loop for a capacitive MEMS gyroscope // Analog Integrated Circuits and Signal Processing. 2010. Vol. 63, No. 3. P. 465–476.
3. Kuznetsov N., Belyaev Y., Styazhkina A. et al. Estimation of PLL architecture on MEMS gyroscope performance // Gyroscopy and Navigation. 2022. Vol. 13, No. 1. P. 44–52.
4. Du K., Swamy M. Wireless Communication Systems: from RF subsystems to 4G enabling technologies. Cambridge University Press, 2010.
5. Rouphael T. Wireless Receiver Architectures and Design: Antennas, RF, Synthesizers, Mixed Signal, and Digital Signal Processing. Elsevier Science, 2014.
6. Best R., Kuznetsov N., Leonov G. et al. Tutorial on dynamic analysis of the Costas loop // IFAC-Papers OnLIne. 2016. Vol. 42. P. 27–49.
7. Cho P. Optical Phase-Locked Loop Performance in Homodyne Detection Using Pulsed and CW LO // Optical Amplifiers and Their Applications/Coherent Optical Technologies and Applications. Optical Society of America, 2006. P. JWB24.
8. Ho K. Phase-Modulated Optical Communication Systems. Springer, 2005.

9. Helaluddin G. M. An improved optical Costas loop PSK receiver: simulation analysis // Journal of Scientific & Industrial Research. 2008. Vol. 67. P. 203–208.
10. Zhong Q.-C., Hornik T. Control of power inverters in renewable energy and smart grid integration. John Wiley & Sons, 2012. Vol. 97.
11. Karimi-Ghartemani M. Enhanced Phase-Locked Loop Structures for Power and Energy Applications. John Wiley & Sons, 2014.
12. Rosenkranz W., Schaefer S. Receiver design for optical inter-satellite links based on digital signal processing // Transparent Optical Networks (ICTON). 2016 18th International Conference on / IEEE. 2016. P. 1–4.
13. Kuznetsov N., Lobachev M., Yuldashev M., Yuldashev R. The Egan problem on the pull-in range of type 2 PLLs // IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Express Briefs. 2021. Vol. 68, No. 4. P. 1467–1471.
14. Kuznetsov N., Lobachev M., Mokaev T. Hidden boundary of global stability in a counterexample to the Kapranov conjecture on the pull-in range // Doklady Mathematics. 2023. Vol. 108, No. 4. P. 300–308.
15. Kuznetsov N., Lobachev M., Yuldashev M. et al. The Gardner problem on the lock-in range of second-order type 2 phase-locked loops // IEEE Transactions on Automatic Control. 2023.
16. Гелиг А., Леонов Г., Якубович В. Устойчивость нелинейных систем с неединственным состоянием равновесия. Наука, 1978. [English transl: Stability of Stationary Sets in Control Systems with Discontinuous Nonlinearities. World Scientific], 2004.
17. Филиппов А. Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. М.: Наука, 1985. 255 с.
18. Piiroinen P.T., Kuznetsov Y.A. An event-driven method to simulate Filippov systems with accurate computing of sliding motions // ACM Transactions on Mathematical Software (TOMS). 2008. Vol. 34, No. 3. P. 13.
19. Leonov G., Kuznetsov N., Kiseleva M., Mokaev R. Global problems for differential inclusions. Kalman and Vyshnegradskii problems and Chua circuits // Differential Equations. 2017. Vol. 53, No. 13. P. 1671–1702.
20. Byrne C. Properties and design of the phase-controlled oscillator with a sawtooth comparator // The Bell System Technical Journal. 1962. Vol. 41, No. 2. P. 559–602.
21. Goldstein A. Analysis of the Phase-Controlled Loop with a Sawtooth Comparator // Bell System Technical Journal. 1962. Vol. 41, No. 2. P. 603–633.
22. Шахтарин Б. Исследование кусочно-линейной системы ФАП // Радиотехника и электроника. 1969. № 8. С. 1415–1424.
23. Сафонов В. О влиянии формы пилообразной характеристики фазового детектора на полосу захвата ФАП // Радиотехника. 1969. Т. 24, № 6. С. 76–80.
24. Белюстина Л., Быков В., Кивелева К., Шалфеев В. О величине полосы захвата системы ФАПЧ с пропорционально-интегрирующим фильтром // Изв. вузов. Радиофизика. 1970. Т. 13, № 4. С. 561–567.
25. Protonotarios E.N. Pull-in time in second-order phase-locked loops with a sawtooth comparator // IEEE Transactions on Circuit Theory. 1970. Vol. 17, No. 3. P. 372–378.
26. Harb B. Computing the pull-in range of second-order phase locked loops with tanlock and sawtooth phase detectors // Proceedings of the 11th International Conference on Circuits, Systems, Electronics, Control & Signal Processing (CSECS'12). 2012. P. 27–32.
27. Harb B.A., Al-Ajlouni A., Eyadeh A. A Collocation-Based Algorithm for Analyzing Bifurcations in Phase Locked Loops with Tanlock and Sawtooth Phase Detectors // Mathematical Problems in Engineering. 2018. Vol. 2018. P. 1–7.
28. Kuznetsov N., Kuznetsova O., Leonov G. et al. A short survey on nonlinear models of QPSK Costas loop // IFAC-PapersOnLine. 2017. Vol. 50, no. 1. P. 6525–6533.
29. Железцов Н. Точечные преобразования и кусочно-линейные системы // Теория колебаний (Андронов А., Витт А. Хайкин С.). М.: Физ. Мат. Лит., 1959. С. 504–649.
30. Леонов Г. Глобальная устойчивость двумерных систем управления угловой ориентацией // Прикладная математика и механика. 2000. Vol. 64, No. 5. P. 890–895.
31. Leonov G., Kuznetsov N. Nonlinear Mathematical Models of Phase-Locked Loops. Stability and Oscillations. Cambridge Scientific Publishers, 2014.
32. Kuznetsov N., Lobachev M., Yuldashev M., et al. The birth of the global stability theory and the theory of hidden oscillations // 2020 European Control Conference Proceedings. 2020. P. 769–774.