УДК 517.929.4

МАТРИЦА ЛЯПУНОВА КАК АНАЛИТИЧЕСКОЕ ПРОДОЛЖЕНИЕ НЕСОБСТВЕННОГО ИНТЕГРАЛА

А.В. Егоров

Санкт-Петербургский государственный университет

Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

E-mail: alexey.egorov@spbu.ru

Ключевые слова: матрица Ляпунова, устойчивость, система с запаздыванием.

Аннотация: В работе представлена новая формула для матрицы Ляпунова для линейных стационарных систем обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений с запаздыванием. Эта формула представляет собой обобщение известного выражения для матрицы Ляпунова в виде несобственного интеграла от функции, построенной на основе фундаментальной матрицы системы. Добавление вспомогательного комплексного параметра и применение аппарата аналитического продолжения позволили обойти проблему расходимости интеграла для неустойчивых систем.

1. Введение

Хорошо известным инструментом исследования устойчивости систем обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) является метод Ляпунова. В случае линейных стационарных систем, как правило, рассматривают квадратичную форму, матрицу которой называют матрицей Ляпунова.

Она определяется как решение линейного матричного уравнения. Существует несколько явных формул для матрицы Ляпунова, представляющих ее в виде ряда или контурного интеграла [3]. Есть также формула [3], представляющая матрицу Ляпунова в виде несобственного интеграла от выражения, основанного на фундаментальной матрице системы. Эта формула удобна тем, что с ней легко работать и она без проблем переносится на бесконечномерный случай. Однако работает она только для экспоненциально устойчивых систем, так как в противном случае несобственный интеграл расходится.

В данной работе представлено обобщение формулы с несобственным интегралом на случай неустойчивых систем. Основная идея заключается во введении вспомогательного комплексного параметра в формулу и построении аналитического продолжения полученной функции. Вспомогательный параметр делает интеграл сходящимся даже для неустойчивых систем в некоторой части комплексной плоскости, а аналитическое продолжение позволяет расширить область определения. Б*о*льшая часть работы посвящена случаю систем ОДУ, так как на их примере проще всего описать основные идеи, а в конце показано, как разработанный подход может быть применен к системам с запаздыванием.

В работе используются следующие обозначения. Если V – некоторая вещественная матрица, то V^T – транспонированная к ней, $\mathbb{R}$ – вещественная прямая, $\mathbb{C}$ – комплексная плоскость. Через $\mathcal{D}^+_{(\Delta)}$ обозначена производная в силу системы (Δ), то есть производная Ли по направлению вдоль решений системы.

2. Матрица Ляпунова системы ОДУ

Для исследования устойчивости линейных систем вида

$$\dot{x}(t) = Ax(t) \tag{1}$$

с вещественной матрицей A размерности $n \times n$ удобно использовать квадратичную функцию Ляпунова $v(x) = x^T V x$, где $x \in \mathbb{R}^n$ – вектор размерности n, V – симметрическая матрица.

Функция v зачастую выбирается таким образом, чтобы ее производная в силу системы совпадала с заранее заданной отрицательно определённой квадратичной функцией:

$$\mathcal{D}^+_{(1)} v(x) = -w(x). \tag{2}$$

Пусть $w(x) = x^T W x$, где W – фиксированная положительно определённая матрица, тогда уравнение (2) сводится к матричному уравнению Ляпунова

$$A^T V + VA = -W.$$

Симметрическое решение V этого уравнения называется *матрицей Ляпунова.* Экспоненциальная устойчивость системы (1) равносильна положительной определённости матрицы Ляпунова.

2.1. Случай экспоненциальной устойчивости

Для случая экспоненциально устойчивой системы (1) явное выражение для матрицы Ляпунова может быть получено из равенства (2). Подставим в него решение $x(t, x_0)$ системы (1), удовлетворяющее начальному условию $x(0, x_0) = x_0$:

$$\frac{d}{dt} v(x(t, x_0)) = -w(x(t, x_0)), \quad t \geqslant 0.$$

Интегрирование этого равенства от нуля до $T > 0$ приводит к формуле

$$v(x_0) = v(x(T, x_0)) + \int_0^T w(x(t, x_0))\, dt.$$

Предполагая, что система (1) экспоненциально устойчива, а функция v непрерывна в окрестности нуля и $v(0) = 0$, можно перейти к пределу при бесконечном T. Таким образом мы получим явное представление для функции Ляпунова в произвольной точке $x_0 \in \mathbb{R}^n$:

$$v(x_0) = \int_0^\infty w(x(t, x_0))\, dt.$$

Решение $x(t, x_0)$ можно представить в виде $x(t, x_0) = K(t)x_0$, где $K(t) = e^{At}$ – *фундаментальная матрица* системы (1).

Таким образом, для квадратичной формы w

$$v(x_0) = x_0^T \int_0^\infty K^T(t) W K(t)\, dt\, x_0.$$

Получается, что v неизбежно является квадратичной формой с матрицей

$$V = \int_0^\infty K^T(t) W K(t)\, dt. \tag{3}$$

Выражение (3) представляет собой явный вид матрицы Ляпунова для экспоненциально устойчивых систем.

2.2. Общий случай

Ясно, что в отсутствие устойчивости интеграл в правой части выражения (3) расходится. Однако известно, что матрица Ляпунова может существовать и в этом случае. Для вывода общей формулы воспользуемся следующим трюком из комплексного анализа. Внесем под знак интеграла вспомогательный комплексный множитель e^{-pt}, где p – комплексное число с достаточно большой вещественной частью:

$$\Phi(p) = \int_0^\infty e^{-pt} K^T(t) W K(t)\, dt.$$

Фактически, функция Φ является образом Лапласа функции $K^T(\cdot) W K(\cdot)$. Легко показать, что интеграл сходится при $p \in \mathbb{C}_{2\sigma} = \{s \in \mathbb{C} \,|\, \mathrm{Re}(s) > 2\sigma\}$, где σ – наибольшая вещественная часть всех собственных чисел матрицы A. Отсюда вытекает следующее очевидное утверждение.

Лемма 1. *Если система* (1) *экспоненциально устойчива, то* $\Phi(0)$ *является матрицей Ляпунова.*

Эта формула может быть перенесена на случай неустойчивых систем, для которых тем не менее выполняется *условие Ляпунова*, то есть $0 \notin \mathcal{P}$, где

$$\mathcal{P} = \{s_1 + s_2 \,|\, s_1, s_2 \text{ – собственные числа матрицы } A\}.$$

Функция Φ может быть аналитически продолжена на всю комплексную плоскость, за исключением точек множества $\mathcal{P}$. Доказательство этого факта не вмещается в рамки пятистраничного доклада, отметим лишь, что оно основано на спектральном разложении фундаментальной матрицы. Дополнительно напомним, что аналитическое продолжение всегда единственно. Обозначим его через $\widehat{\Phi}$.

Теорема 1. *Если система* (1) *удовлетворяет условию Ляпунова, то* $\widehat{\Phi}(0)$ *является матрицей Ляпунова.*

Доказательство. Фундаментальная матрица K удовлетворяет тождеству $\dot{K}(t) = K(t)A$, следовательно, для чисел $p \in \mathbb{C}_{2\sigma}$

$$\begin{aligned} &A^T\Phi(p) + \Phi(p)A - p\Phi(p) \\ &\qquad = \int_0^\infty \frac{d}{dt}\left[e^{-pt}K^T(t)WK(t)\right] dt = -e^{-pt}K^T(t)WK(t)\Big|_{t=0} = -W. \end{aligned}$$

Каждый из членов полученного равенства может быть аналитически продолжен на множество $\mathbb{C} \setminus \mathcal{P}$. Следовательно,

$$A^T\widehat{\Phi}(p) + \widehat{\Phi}(p)A - p\widehat{\Phi}(p) = -W, \quad p \in \mathbb{C} \setminus \mathcal{P}.$$

По условию Ляпунова $0 \in \mathbb{C} \setminus \mathcal{P}$, значит, можно взять $p = 0$:

$$A^T\widehat{\Phi}(0) + \widehat{\Phi}(0)A = -W.$$

Мы получили уравнение Ляпунова, которое доказывает, что $\widehat{\Phi}(0)$ – матрица Ляпунова.

Известно, что условие Ляпунова является достаточным для единственности матрицы Ляпунова. Таким образом, можно заключить, что матрица Ляпунова является аналитическим продолжением несобственного интеграла (3). Для систем обыкновенных дифференциальных уравнений полученная формула представляет скорее теоретический интерес, она дает простое объяснение связи существования матрицы Ляпунова с условием Ляпунова. А вот для систем с запаздыванием аналогичное выражение, которое будет представлено в следующем разделе, позволяет получить новые результаты и существенно упростить доказательства некоторых известных формул. Еще одно важное преимущество новой формулы состоит в том, что она легко обобщается на другие классы систем.

Пример 1. *Рассмотрим неустойчивую систему*

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x(t).$$

Если в качестве W *взять единичную матрицу, то*

$$K^T(t)WK(t) = e^{2t}\begin{pmatrix} 1 & t \\ t & 1+t^2 \end{pmatrix}.$$

Образ Лапласа этой функции

$$\Phi(p) = \begin{pmatrix} (p-2)^{-1} & (p-2)^{-2} \\ (p-2)^{-2} & (p-2)^{-1} + 2(p-2)^{-3} \end{pmatrix}.$$

Аналитическое продолжение очевидно и определено в любой точке комплексной плоскости, кроме $p = 2$. *Следовательно, матрица Ляпунова имеет вид*

$$V = \widehat{\Phi}(0) = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

В завершение этого раздела отметим, что через аналитическое продолжение может быть построена не только матрица Ляпунова, но и функция Ляпунова. Если ввести вспомогательную функцию

$$g(p, x_0) = \int_0^{\infty} e^{-pt} w(x(t, x_0))\, dt$$

на некоторой области комплексной плоскости, а затем продолжить ее до точки $p = 0$, то получим функцию Ляпунова в форме $v(x_0) = \widehat{g}(0, x_0)$. При этом не обязательно, чтобы w была квадратичной формой.

3. Матрица Ляпунова системы с запаздыванием

Матрица Ляпунова для системы с запаздыванием [1,2]

$$\dot{x}(t) = A_0 x(t) + A_1 x(t-h) \tag{4}$$

с вещественными матрицами A_0, A_1 размерности $n \times n$ представляет собой непрерывную функциональную матрицу $U(\tau)$, $\tau \in [-h, h]$, удовлетворяющую трем свойствам: $U'(\tau) = U(\tau)A_0 + U(\tau - h)A_1$ для $\tau \geqslant 0$, $U(\tau) = U^T(-\tau)$ для $\tau \in \mathbb{R}$, $U'(+0) - U'(-0) = -W$. Здесь штрих обозначает производную, $+0$ и -0 правый и левый пределы в нуле, а W, как и в случае ОДУ, – заданная положительно определенная матрица. Для случая экспоненциальной устойчивости существует аналог формулы (3) для систем с запаздыванием [1]:

$$U(\tau) = \int_0^\infty K^T(t) W K(t+\tau)\, dt, \quad \tau \in [-h, h],$$

где K – фундаментальная матрица системы. Введя функцию

$$\Phi(p, \tau) = \int_0^\infty e^{-pt} K^T(t) W K(t+\tau)\, dt \tag{5}$$

для комплексных p с достаточно большой вещественной частью и продолжив ее аналитически до точки $p = 0$, можно получить общую формулу для матрицы U.

Теорема 2. *Если система* (4) *удовлетворяет условию Ляпунова, то есть не имеет двух собственных чисел, дающих в сумме нуль, то* $\widehat{\Phi}(0, \tau)$, $\tau \in [-h, h]$, *является матрицей Ляпунова, где* $\widehat{\Phi}(\cdot, \tau)$ *обозначает аналитическое продолжение функции* (5) *по аргументу* p *при фиксированном* τ.

4. Заключение

Получена новая формула для матрицы Ляпунова для системы ОДУ и системы с запаздыванием. Первое преимущество формулы состоит в том, что с ней удобно работать, что позволяет существенно упростить доказательства некоторых результатов из теории устойчивости систем с запаздыванием, связанных с матрицей Ляпунова. Второе преимущество – простота обобщения на другие классы линейных бесконечномерных систем. Для тех классов, где пока не придуманы явные формулы для матрицы Ляпунова, новая формула позволит доказать существование этой матрицы. В частности, это актуально для периодических систем с постоянным запаздыванием и систем с распределенными параметрами.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 23-71-10099, https://rscf.ru/project/23-71-10099.

Список литературы

1. Kharitonov V.L. Time-Delay Systems: Lyapunov Functionals and Matrices. Basel, Switzerland: Birkhäuser, 2013. 311 p.
2. Kharitonov V.L., Zhabko A.P. Lyapunov-Krasovskii approach to the robust stability analysis of time-delay systems // Automatica. 2003. Vol. 39, No. 1. P. 15–20.
3. Lancaster P. Explicit Solutions of Linear Matrix Equations // SIAM Review. 1970. Vol. 12, No. 4. P. 544–566.