3. Матрица Ляпунова системы с запаздыванием

Матрица Ляпунова для системы с запаздыванием [1, 2]

$$\dot{x}(t) = A_0 x(t) + A_1 x(t-h) \tag{4}$$

с вещественными матрицами A_0, A_1 размерности $n \times n$ представляет собой непрерывную функциональную матрицу $U(\tau)$, $\tau \in [-h, h]$, удовлетворяющую трем свойствам: $U'(\tau) = U(\tau)A_0 + U(\tau - h)A_1$ для $\tau \geqslant 0$, $U(\tau) = U^T(-\tau)$ для $\tau \in \mathbb{R}$, $U'(+0) - U'(-0) = -W$. Здесь штрих обозначает производную, $+0$ и -0 правый и левый пределы в нуле, а W, как и в случае ОДУ, – заданная положительно определенная матрица. Для случая экспоненциальной устойчивости существует аналог формулы (3) для систем с запаздыванием [1]:

$$U(\tau) = \int_0^\infty K^T(t) W K(t+\tau)\, dt, \quad \tau \in [-h, h],$$

где K – фундаментальная матрица системы. Введя функцию

$$\Phi(p, \tau) = \int_0^\infty e^{-pt} K^T(t) W K(t+\tau)\, dt \tag{5}$$

для комплексных p с достаточно большой вещественной частью и продолжив ее аналитически до точки $p = 0$, можно получить общую формулу для матрицы U.

Теорема 2. *Если система* (4) *удовлетворяет условию Ляпунова, то есть не имеет двух собственных чисел, дающих в сумме нуль, то* $\widehat{\Phi}(0, \tau)$, $\tau \in [-h, h]$, *является матрицей Ляпунова, где* $\widehat{\Phi}(\cdot, \tau)$ *обозначает аналитическое продолжение функции* (5) *по аргументу* p *при фиксированном* τ.

4. Заключение

Получена новая формула для матрицы Ляпунова для системы ОДУ и системы с запаздыванием. Первое преимущество формулы состоит в том, что с ней удобно работать, что позволяет существенно упростить доказательства некоторых результатов из теории устойчивости систем с запаздыванием, связанных с матрицей Ляпунова. Второе преимущество – простота обобщения на другие классы линейных бесконечномерных систем. Для тех классов, где пока не придуманы явные формулы для матрицы Ляпунова, новая формула позволит доказать существование этой матрицы. В частности, это актуально для периодических систем с постоянным запаздыванием и систем с распределенными параметрами.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 23-71-10099, https://rscf.ru/project/23-71-10099.

Список литературы

1. Kharitonov V.L. Time-Delay Systems: Lyapunov Functionals and Matrices. Basel, Switzerland: Birkhäuser, 2013. 311 p.
2. Kharitonov V.L., Zhabko A.P. Lyapunov-Krasovskii approach to the robust stability analysis of time-delay systems // Automatica. 2003. Vol. 39, No. 1. P. 15–20.
3. Lancaster P. Explicit Solutions of Linear Matrix Equations // SIAM Review. 1970. Vol. 12, No. 4. P. 544–566.