УДК 531.36

О ЛИУВИЛЛЕВЫХ РЕШЕНИЯХ В ИНТЕГРИРУЕМОМ СЛУЧАЕ ГЕССА ЗАДАЧИ О ДВИЖЕНИИ ТЯЖЕЛОГО ГИРОСТАТА С НЕПОДВИЖНОЙ ТОЧКОЙ

А.С. Кулешов
Механико-математический факультет МГУ им. М.В. Ломоносова
Россия, 119234, Москва, Ленинские горы, Главное здание МГУ,
Механико - математический факультет
E-mail: kuleshov@mech.math.msu.su

А.Д. Скрипкин
Механико-математический факультет МГУ им. М.В. Ломоносова
Россия, 119234, Москва, Ленинские горы, Главное здание МГУ,
Механико - математический факультет
E-mail: antohaskripkin@gmail.com

Ключевые слова: гиростат с неподвижной точкой, случай Гесса, линейное дифференциальное уравнение второго порядка, алгоритм Ковачича.

Аннотация: Рассматривается задача о движении тяжелого гиростата с неподвижной точкой. В 1963 году Л. Н. Сретенский показал, что в этой задаче существует частный случай интегрируемости, соответствующий случаю Гесса в классической задаче о движении тяжелого твердого тела с неподвижной точкой. В данной работе показано, что как и в классической задаче о движении тяжелого твердого тела с неподвижной точкой, решение задачи описания движения тяжелого гиростата в случае Гесса-Сретенского приводится к интегрированию одного линейного дифференциального уравнения второго порядка с рациональными коэффициентами. При помощи алгоритма Ковачича получены условия на параметры задачи, при выполнении которых соответствующее линейное дифференциальное уравнение второго порядка допускает явное решение, выражающееся в лиувиллевых функциях, и следовательно, уравнения движения гиростата могут быть проинтегрированы в квадратурах.

1. Введение

В 1890 году немецкий математик и механик В. Гесс [1] указал новый частный случай интегрируемости уравнений Эйлера-Пуассона движения тяжелого твердого тела с неподвижной точкой. В 1963 году Л. Н. Сретенский в своей работе [2] показал, что частный случай интегрируемости, аналогичный случаю Гесса, будет существовать и в задаче о движении тяжелого гиростата – тяжелого твердого тела с неподвижной точкой, в котором расположен вращающийся однородный маховик. В дальнейшем в работах [3–10] были предложены многочисленные обобщения случая

Гесса, имеющие место при движении твердого тела и гиростата с неподвижной точкой в различных силовых полях. Наиболее общие условия, при которых существует частный случай интегрируемости, аналогичный случаю Гесса, были указаны в работе А. А. Косова [8].

Первые работы, в которых приводилось качественное описание движения тяжелого твердого тела в интегрируемом случае Гесса были опубликованы практически сразу после того, как этот случай был указан. В 1892 году П. А. Некрасов показал [11, 12], что решение задачи о движении тяжелого твердого тела с неподвижной точкой при условиях Гесса сводится к интегрированию линейного дифференциального уравнения второго порядка с переменными коэффициентами. Аналогичный вывод в отношении задачи о движении гиростата в интегрируемом случае Гесса был сделан в работе Л. Н. Сретенского [2]. В данной работе представлен вывод соответствующего уравнения второго порядка и показано, как привести коэффициенты этого уравнения к виду рациональных функций. Затем при помощи алгоритма Ковачича [13] исследуется вопрос о существовании лиувиллевых решений у соответствующего линейного уравнения второго порядка. Получены условия на параметры задачи, при выполнении которых уравнения движения тяжелого гиростата с неподвижной точкой в случае Гесса интегрируются в квадратурах.

2. Постановка задачи

Рассмотрим движение твердого тела с одной закрепленной точкой O в однородном поле силы тяжести. Введем подвижную систему координат $Ox_1x_2x_3$, оси которой совпадают с главными осями инерции тела для точки O. Допустим, что с этим телом связана некоторая ось, вокруг которой может вращаться однородный маховик. Такую систему (тело с маховиком) принято называть гиростатом. Пусть M – масса гиростата, g – ускорение свободного падения, A_i – моменты инерции тела относительно осей Ox_i, $(i = 1, 2, 3)$; ω_i, γ_i и x_i – проекции на оси Ox_i вектора мгновенной угловой скорости тела $\boldsymbol{\omega}$, единичного вектора $\boldsymbol{\gamma}$, направленного по вертикали вверх, и радиуса – вектора центра масс гиростата соответственно. Через s_i обозначим постоянные компоненты кинетического момента маховика (гиростатического момента). Тогда уравнения движения гиростата в системе координат $Ox_1x_2x_3$ имеют вид [2]:

$$
\begin{aligned}
&A_1\dot{\omega}_1 + (A_3 - A_2)\,\omega_2\omega_3 + s_3\omega_2 - s_2\omega_3 = Mg\,(x_3\gamma_2 - x_2\gamma_3)\,,\\
&A_2\dot{\omega}_2 + (A_1 - A_3)\,\omega_1\omega_3 + s_1\omega_3 - s_3\omega_1 = Mg\,(x_1\gamma_3 - x_3\gamma_1)\,,\\
&A_3\dot{\omega}_3 + (A_2 - A_1)\,\omega_1\omega_2 + s_2\omega_1 - s_1\omega_2 = Mg\,(x_2\gamma_1 - x_1\gamma_2)\,,
\end{aligned}
\tag{1}
$$

$$
\dot{\gamma}_1 = \omega_3\gamma_2 - \omega_2\gamma_3, \quad \dot{\gamma}_2 = \omega_1\gamma_3 - \omega_3\gamma_1, \quad \dot{\gamma}_3 = \omega_2\gamma_1 - \omega_1\gamma_2. \tag{2}
$$

Известно [3, 6, 14], что для решения системы уравнений (1)–(2) достаточно найти четыре независимых первых интеграла данной системы уравнений. При любых значениях параметров A_i, x_i, s_i, $i = 1, 2, 3$ известны три независимых первых интеграла системы уравнений (1)–(2) – интеграл энергии

$$H=\frac{1}{2}\left(A_1\omega_1^2+A_2\omega_2^2+A_3\omega_3^2\right)+Mg\left(x_1\gamma_1+x_2\gamma_2+x_3\gamma_3\right)=E,$$

интеграл площадей

$$K=\left(A_1\omega_1+s_1\right)\gamma_1+\left(A_2\omega_2+s_2\right)\gamma_2+\left(A_3\omega_3+s_3\right)\gamma_3=k$$

и геометрический интеграл

$$\gamma_1^2+\gamma_2^2+\gamma_3^2=1.$$

В 1963 году Л.Н. Сретенский показал [2], что при выполнении условий

$$x_3=0,\quad A_2\left(A_3-A_1\right)x_2^2=A_1\left(A_2-A_3\right)x_1^2,\quad s_3=0,\quad A_2>A_3>A_1 \tag{3}$$

система уравнений (1)–(2) допускает частный четвертый интеграл, имеющий вид:

$$A_1\omega_1x_1+A_2\omega_2x_2+\frac{A_1x_1\left(s_2x_1-s_1x_2\right)}{\left(A_3-A_1\right)x_2}=0. \tag{4}$$

Если ввести обозначения:

$$L_1=\frac{A_1\omega_1x_1+A_2\omega_2x_2}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}},\quad L_2=\frac{A_2\omega_2x_1-A_1\omega_1x_2}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}},\quad L_3=A_3\omega_3,$$

$$\nu_1=\frac{\gamma_1x_1+\gamma_2x_2}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}},\quad \nu_2=\frac{\gamma_2x_1-\gamma_1x_2}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}},\quad \nu_3=\gamma_3,\quad k_1=\frac{s_1x_1+s_2x_2}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}},$$

$$k_2=\frac{s_2x_1-s_1x_2}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}},\quad \Gamma=Mg\sqrt{x_1^2+x_2^2},\quad c=\frac{1}{A_3},$$

$$a=\frac{A_2x_1^2+A_1x_2^2}{A_1A_2\left(x_1^2+x_2^2\right)},\quad b=\frac{\left(A_1-A_2\right)x_1x_2}{A_1A_2\left(x_1^2+x_2^2\right)},$$

то в переменных L_1, L_2, L_3, ν_1, ν_2, ν_3 система уравнений (1)–(2) перепишется следующим образом:

$$\begin{gathered}\dot L_1=-bL_3\left(L_1-\frac{ck_2}{b}\right),\quad \dot L_2=\left(a-c\right)L_1L_3+bL_2L_3-ck_1L_3+\nu_3\Gamma,\\ \dot L_3=-\left(a-c\right)L_1L_2+bL_1^2-bL_2^2+\left(k_1b-k_2a\right)L_1+\left(k_1c-k_2b\right)L_2-\nu_2\Gamma,\\ \dot\nu_1=cL_3\nu_2-\left(cL_2+bL_1\right)\nu_3,\quad \dot\nu_2=\left(aL_1+bL_2\right)\nu_3-cL_3\nu_1,\\ \dot\nu_3=-\left(aL_1+bL_2\right)\nu_2+\left(cL_2+bL_1\right)\nu_1.\end{gathered} \tag{5}$$

Из первого уравнения системы уравнений (5) следует частный интеграл Гесса (4), который имеет вид

$$L_1\equiv\frac{ck_2}{b}. \tag{6}$$

Инвариантное многообразие (6) (или, в других обозначениях, (4)) вместе с условиями (3) и определяет интегрируемый случай Гесса в задаче о движении тяжелого гиростата с неподвижной точкой. При выполнении условий (3) на уровне частного интеграла Гесса (6) уравнения (5) заметно упрощаются и принимают вид:

$$\dot{\bar{L}}_2 = b\bar{L}_2 L_3 + (F - Gc)\,L_3 + \nu_3\Gamma, \quad \dot{L}_3 = -b\bar{L}_2^2 - (F - Gc)\,\bar{L}_2 - \nu_2\Gamma,$$

$$\dot{\nu}_1 = cL_3\nu_2 - c\bar{L}_2\nu_3, \quad \dot{\nu}_2 = -cL_3\nu_1 + b\bar{L}_2\nu_3 + F\nu_3, \quad \dot{\nu}_3 = c\bar{L}_2\nu_1 - b\bar{L}_2\nu_2 - F\nu_2. \tag{7}$$

Здесь введены обозначения

$$\bar{L}_2 = L_2 + k_2, \quad F = \frac{(ac - b^2)\,k_2}{b}, \quad G = \frac{ck_2}{b} + k_1.$$

Система уравнений (7) допускает следующие первые интегралы

$$\frac{c}{2}\left(\bar{L}_2^2 + L_3^2\right) + \Gamma\nu_1 = E; \quad G\nu_1 + \bar{L}_2\nu_2 + L_3\nu_3 = k; \quad \nu_1^2 + \nu_2^2 + \nu_3^2 = 1. \tag{8}$$

Вводя безразмерные переменные и параметры

$$\bar{L}_2 = \sqrt{\frac{\Gamma}{c}}y, \quad L_3 = \sqrt{\frac{\Gamma}{c}}z, \quad t = \frac{\tau}{\sqrt{\Gamma c}}, \quad d_1 = \frac{b}{c},$$

$$A = \frac{F}{\sqrt{\Gamma c}}, \quad B = G\sqrt{\frac{c}{\Gamma}}, \quad h = \frac{E}{\Gamma}, \quad p_1 = k\sqrt{\frac{c}{\Gamma}},$$

запишем систему уравнений (7) и первые интегралы (8) в безразмерной форме

$$\frac{dy}{d\tau} = d_1yz + (A - B)\,z + \nu_3, \quad \frac{dz}{d\tau} = -d_1y^2 - (A - B)\,y - \nu_2,$$

$$\frac{d\nu_1}{d\tau} = z\nu_2 - y\nu_3, \quad \frac{d\nu_2}{d\tau} = d_1y\nu_3 - z\nu_1 + A\nu_3, \quad \frac{d\nu_3}{d\tau} = -d_1y\nu_2 + y\nu_1 - A\nu_2, \tag{9}$$

$$\frac{y^2 + z^2}{2} + \nu_1 = h, \quad y\nu_2 + z\nu_3 + B\nu_1 = p_1, \quad \nu_1^2 + \nu_2^2 + \nu_3^2 = 1.$$

Вводя новые переменные по формулам

$$y = x\cos\varphi, \quad z = x\sin\varphi, \quad u = \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}$$

получим, что функция $u\,(x)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению Риккати:

$$\frac{du}{dx} = -\frac{d_1x^3 - \left(A - \dfrac{B}{2}\right)x^2 - (p_1 - Bh)}{2x\sqrt{x^2\left(1 - \left(\dfrac{x^2}{2} - h\right)^2\right) - \left(p_1 + B\left(\dfrac{x^2}{2} - h\right)\right)^2}}u^2 +$$

$$+\frac{d_1x^3 + \left(A - \dfrac{B}{2}\right)x^2 + (p_1 - Bh)}{2x\sqrt{x^2\left(1 - \left(\dfrac{x^2}{2} - h\right)^2\right) - \left(p_1 + B\left(\dfrac{x^2}{2} - h\right)\right)^2}},$$

из которого можно получить линейное дифференциальное уравнение второго порядка. Применение к этому дифференциальному уравнению алгоритма Ковачича [13] приводит к следующему результату.

Теорема 1. *Лиувиллевы решения в задаче о движении тяжелого гиростата с неподвижной точкой в интегрируемом случае Гесса существуют только в двух случаях:* $d_1 = 0$ *(случай Лагранжа) или при выполнении условий*

$$p_1 - Bh = 0, \quad A = \frac{B}{2}.$$

Список литературы

1. Hess W. Ueber die Euler'schen Bewegungsgleichungen und über eine neue partikuläre Lösung des Problems der Bewegung eines starren Körpers um einen festen Punkt // Mathematische Annalen. 1890. Vol. 37. Issue 2. P. 153–181.
2. Сретенский Л.Н. О некоторых случаях интегрируемости уравнений движения гиростата // Доклады АН СССР. 1963. Т. 149, № 2. С. 292–294.
3. Борисов А.В., Мамаев И.С. Динамика твердого тела. Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, 2001. 384 с.
4. Борисов А.В., Мамаев И.С. Случай Гесса в динамике твердого тела // Прикладная математика и механика. 2003. Т. 67, Вып. 2. С. 256–265.
5. Буров А.А., Карапетян А.В. О движении твердого тела в потоке частиц // Прикладная математика и механика. 1993. Т. 57, Вып. 2. С. 77–81.
6. Козлов В.В. Методы качественного анализа в динамике твердого тела. М.: Издательство Московского университета, 1980. 231 с.
7. Козлов В.В. К задаче о вращении твердого тела в магнитном поле // Известия АН СССР. Механика твердого тела. 1985. № 6. С. 28–33.
8. Косов А.А. Об аналогах случая Гесса для гиростата при действии момента гироскопических и циркулярных сил // Прикладная математика и механика. 2022. Т. 86, Вып. 6. С. 839–856.
9. Лунев В.В. Интегрируемые случаи в задаче о движении тяжелого твердого тела с закрепленной точкой в поле сил Лоренца // Доклады АН СССР. 1984. Т. 275, № 4. С. 824 – 826.
10. Самсонов В.А. О вращении тела в магнитном поле // Известия АН СССР. Механика твердого тела. 1984. № 4. С. 32–34.
11. Некрасов П.А. К задаче о движении тяжелого твердого тела около неподвижной точки // Математический сборник. 1892. Т. 16, Вып. 3. С. 508–517.
12. Некрасов П.А. Аналитическое исследование одного случая движения тяжелого твердого тела около неподвижной точки // Математический сборник. 1896. Т. 18, Вып. 2. С. 161–274.
13. Kovacic J. An algorithm for solving second order linear homogeneous differential equations // Journal of Symbolic Computation. 1986. Vol. 2. P. 3–43.
14. Архангельский Ю.А. Аналитическая динамика твердого тела. М.: Наука, 1977. 328 с.