УДК 517.925.42

О РОЖДЕНИИ ПРЕДЕЛЬНЫХ ЦИКЛОВ

А.Г. Кушнер
Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН
Россия, 117997, Москва, Профсоюзная ул., 65
E-mail: kushner@physics.msu.ru

Ключевые слова: предельные циклы, центр, фокус, устойчивость, бифуркации.

Аннотация: Рассмотрены бифуркации рождения предельных циклов из особых точек на плоскости, отличные от бифуркации Андронова–Хопфа. В частности, рождение предельных циклов из центра и в случае, когда при нулевом значении параметра матрица линейного приближения имеет нулевые собственные значения.

1. Введение

По-видимому, первые содержательные результаты о бифуркации рождения предельного цикла на плоскости из особой точки были получены А.А. Андроновым [1]. Им рассматривалась система двух автономных дифференциальных уравнений первого порядка, зависящих от параметра μ и имеющая особую точку типа «фокус» при нулевом значении этого параметра. Предполагалось, что комплексно-сопряженные собственные значения $\alpha(\mu) \pm i\beta(\mu)$ линейной части этой системы удовлетворяют условию

$$\alpha(0) = 0, \quad \alpha'(0) \neq 0, \quad \beta(0) \neq 0. \tag{1}$$

Тогда, согласно его результатам, при изменении параметра μ у этой системы возникает предельный цикл, окружающий фокус.

Позднее аналогичные результаты были получены Е. Хопфом [5] для систем нескольких дифференциальных уравнений, когда матрица ее линейной части имеет пару комплексно-сопряженных собственных значений, удовлетворяющих условиям (1), а оставшаяся часть спектра лежит в левой полуплоскости и равномерно отделена от мнимой оси. Перевод этой статьи на русский язык приведен в монографии [3]. Это дало основание называть такую бифуркацию рождения предельного цикла бифуркацией Андронова–Хопфа.

Условие $\alpha'(0) \neq 0$, однако, не является необходимым для рождения предельного цикла. Соответствующие примеры приведены в [4].

Пример рождения предельного цикла из центра приведен в [2]. Однако рассмотренная там система имеет весьма частный вид.

В данной работе рассматриваются системы двух автономных дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = X(x, \mu) \tag{2}$$

с аналитическими правыми частями, зависящими от малого параметра $\mu \in (-\varepsilon, \varepsilon)$. Здесь $x = (x_1, x_2)^t$, $X = (X_1, X_2)^t$.

Нулевое зннач ение параметра μ будем называть точкой бифуркации предельного цикла, если существует положительное число ε, такое, что при всех $\mu \in (-\varepsilon, 0)$ или при всех $\mu \in (0, \varepsilon)$ система (2) имеет предельный цикл, стягивающийся в особую точку $O(0,0)$ системы при $\mu \to 0$.

2. Рождение предельного цикла из нелинейного центра

Будем считать, что выполнены следующие условия:

- $X_j(0,0,\mu) = 0$ для любого значения $\mu \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, $\quad j = 1, 2$;
- собственные значения $\alpha(\mu) \pm i\beta(\mu)$ матрицы линейной части системы (2) удовлетворяют условию

$$\alpha(0) = 0, \quad \alpha'(0) = 0, \quad \alpha''(0) \neq 0, \quad \beta(0) \neq 0. \tag{3}$$

Тогда при достаточно малом ε точка O фазовой плоскости является изолированной особой точкой системы при всех значениях $\mu \in (-\varepsilon, \varepsilon)$.

Линейной заменой фазовых переменных и масштабированием времени систему (2) можно привести к виду

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = & \alpha(\mu)x_1 - x_2 + f_1(x_1, x_2) + \mu g_1(x_1, x_2, \mu), \\ \dot{x}_2 = & x_1 + \alpha(\mu)x_2 + f_2(x_1, x_2) + \mu g_2(x_1, x_2, \mu), \end{cases} \tag{4}$$

где разложения в ряды по фазовым переменным функций $f_j, g_j \quad (j = 1, 2)$ начинаются с членов не ниже второй степени.

Теорема 1. *Пусть выполняются следующие условия:*

- *при $\mu = 0$ особая точка O системы (4) явлется центром;*
- *разложения функций $g_1(x_1, x_2, 0)$ и $g_2(x_1, x_2, 0)$ в ряды начинаются с членов третьей степени:*

$$g_j(x_1, x_2, 0) = \sum_{p+q=3}^{\infty} g^j_{p,q} x_1^p x_2^q \qquad g^j_{p,q} \in \mathbb{R};$$

- *выполнено неравенство*

$$3(g^1_{3,0} + g^2_{0,3}) + g^1_{1,2} + g^2_{2,1} \neq 0.$$

Тогда нулевое значение параметра μ является точкой бифуркации предельного цикла системы (4). Предельный цикл устойчив при $\alpha''(0) > 0$ и неустойчив при $\alpha''(0) < 0$.

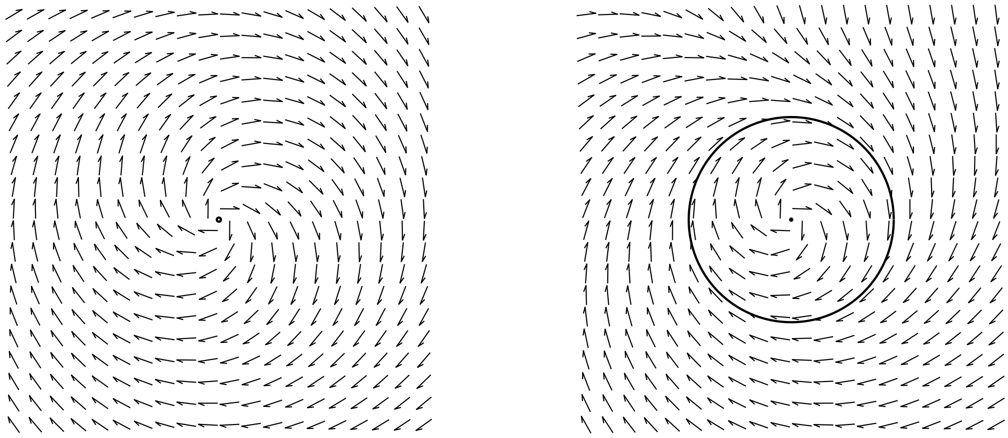

Рис. 1. Бифуркация рождения предельного цикла в системе (6). Фокус при $\mu = 0$ (слева) и рождающийся из него предельный цикл при $\mu < 0$ (справа)

3. Рождение предельного цикла из особой точки с нулевыми собственными значениями

Рассмотрим систему

$$(5)\qquad \begin{cases} \dot{x}_1 = & \alpha(\mu)x_1 - \beta(\mu)x_2 + (\xi x_1 - \eta x_2)(x_1^2 + x_2^2)^n + f_1(x_1, x_2) + g_1(x_1, x_2, \mu), \\ \dot{x}_2 = & \beta(\mu)x_1 + \alpha(\mu)x_2 + (\xi x_2 + \eta x_1)(x_1^2 + x_2^2)^n + f_2(x_1, x_2) + g_2(x_1, x_2, \mu). \end{cases}$$

где $\xi, \eta \in \mathbb{R}$, $\xi \neq 0$.

Теорема 2. *Пусть для системы* (5) *выполнены следующие условия:*

- $\alpha(0) = \beta(0) = 0, \quad \alpha'(0) \neq 0$*;*
- *разложения в ряды по степеням x_1, x_2 функций f_1, f_2 начинаются с членов не ниже $2(n+1)$-ой степени, а функций g_1, g_2 — с членов не ниже второй степени;*
- $g_j(x_1, x_2, 0) = 0$ *и* $\dfrac{\partial g_j}{\partial \mu}(x_1, x_2, 0) = 0$ *в некоторой окрестности точки $O (j = 1, 2)$;*
- *при достаточно малом ε точка O фазовой плоскости является изолированной особой точкой системы при всех значениях $\mu \in (-\varepsilon, \varepsilon)$.*

Тогда нулевое значение параметра μ является точкой бифуркации предельного цикла системы (5)*.*

Пример 1. *Система*

$$(6)\qquad \begin{cases} \dot{x}_1 = & -\mu x_1 + \mu^2 x_2 - (x_1 - 2x_2)(x_1^2 + x_2^2) - x_2^4, \\ \dot{x}_2 = & -\mu^2 x_1 - \mu x_2 - (x_2 + 2x_1)(x_1^2 + x_2^2) + x_1 x_2^3 \end{cases}$$

при нулевом значении μ имеет особую точку $(0,0)$ *типа «фокус», а при $\mu < 0$ существует устойчивый предельный цикл $x_1^2 + x_2^2 + \mu = 0$ (см. рис. 1).*

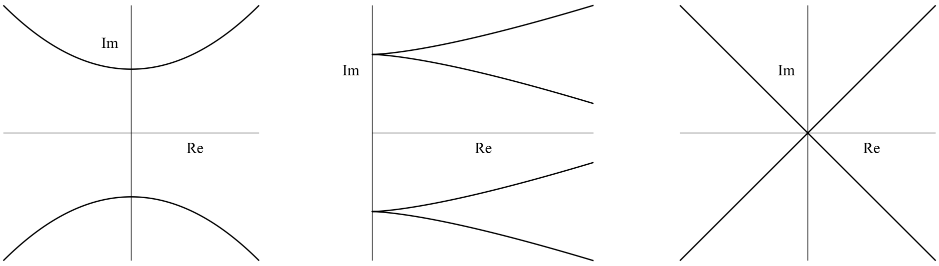

Рис. 2. Траектории собственных значений на комплексной плоскости при изменении параметра μ: 1) в случае выполнения условий (1) теоремы Андронова–Хопфа (слева), 2) в случае выполнения условий (3) теоремы 1 (в центре) и 3) в случае выполнения условий теоремы 2 (справа)

4. Заключение

В работе приведены теоремы о бифуркации рождения предельного цикла из особых точек типа «фокус» или «центр» в некоторых системах дифференциальных уравнений, не удовлетворяющих условиям классической теоремы Андронова–Хопфа. В частности, рассмотрены случаи когда a) спектр матрицы линейного приближения системы отражается от мнимой оси при $\mu = 0$, а не пересекает ее, как в классическом случае и b) спектр пересекает мнимую ось в нуле (см. рис.2).

Исследование поддержано грантом № 23-21-00390 Российского научного фонда.

Список литературы

1. Андронов А.А. Математические проблемы автоколебаний // Сб. «Первая Всесоюзная конференция по колебаниям». Т. 1. М.: ГТТИ. 1933.
2. Андронов А.А., Леонтович Е.А. Рождение предельных циклов из негрубого фокуса или центра и от негрубого предельного цикла // Матем. сб. 1956. Т. 40 (82), № 2. С. 179–224.
3. Марсден Дж., Мак-Кракен М. Бифуркация рождения цикла и ее приложения. М.:Мир, 1980. 368 с.
4. Chow S.-N., Mallet-Paret J. Integral averaging and bifurcation // Journal of Differential Equations. 1977. Vol. 26, No. 1. P. 112–159.
5. Hopf E. Abzweigung einer periodischen Lösung von einer stationären eines Differential systems // Ber. Verh. Sächs. Akad. Wiss. Leipzig. Math.–Nat. Kl. 1943. Vol. 95. P. 3–22.