УДК 517.93

# МЕТОД ТОПОЛОГИЧЕСКОЙ ГРУБОСТИ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ: ПРИЛОЖЕНИЯ К ИССЛЕДОВАНИЯМ ГРУБОСТИ, БИФУРКАЦИЙ И ХАОСА В СИНЕРГЕТИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ

**Р.О. Оморов**
*Институт машиноведения и автоматики НАН КР*
Кыргызстан, 720071, Бишкек, пр. Чуй, 265а
E-mail: romano_ip@list.ru

**Ключевые слова:** динамические системы, метод топологической грубости, бифуркация, хаос, синергетические системы, число обусловленности матриц, максимальная грубость систем, минимальная не грубость систем.

**Аннотация:** Рассматриваются основы метода топологической грубости динамических систем, основанного на понятии грубости по Андронову-Понтрягину. Даны теоремы об условиях достижимости максимальной грубости и минимальной не грубости, возникновения бифуркаций топологий динамических систем. В качестве показателя грубости использовано число обусловленности матрицы приведения к диагональному (квазидиагональному) виду матрицы Якоби в особых точках фазового пространства системы. Метод может быть использован для исследования грубости и бифуркаций динамических систем. В работах автора метод использован для исследований известных синергетических систем и хаоса различной физической природы: аттракторы Лоренца иРесслера, систем Чуа, Белоусова-Жаботинского, «хищник-жертва-пища», Хенона, Калдора, Шумпетера, бифуркации Хопфа и др. Также рассмотрены случаи вырожденных матриц Якоби и существенно нелинейных систем, для которых предложены использование процедур псевдообращения матриц.

## 1. Введение

Проблемам исследования грубости динамических систем и синтеза грубых (робастных) систем управления уделяется большое внимание в современной теории динамических систем и теории управления [1-3].

В теории динамических систем существуют два различных подхода к проблеме грубости: 1) на основе понятия грубости по Пейксото или иначе «структурной устойчивости»; 2) на основе понятия грубости по Андронову-Понтрягину, когда в отличие от предыдущего требуется ε– близость исходной и возмущенного гомеоморфизмов [1, 2, 4].

В работе [5] на базе понятия грубости по Андронову-Понтрягину были заложены основы «метода топологической грубости», который позволяет исследовать грубость и бифуркации динамических систем различной природы, в частности синергетических систем, а также синтезировать грубые (робастные) системы управления [6-12]. В данной работе рассматриваются основы и развитие метода топологической грубости к случаям вырожденных матриц Якоби, а также показателей грубости высокого порядка для существенно нелинейных систем.

## 2. Основы метода топологической грубости

В классической постановке вопросы грубости и бифуркаций были поставлены еще на заре становления топологии как нового научного направления математики великим французским ученым А. Пуанкаре. Грубость динамических систем определяется, как свойство систем сохранять качественную картину разбиения фазового пространства на траектории при малом возмущении топологий, при рассмотрении близких по виду уравнений систем.

В современной терминологии «бифуркация» употребляется как название любого скачкообразного изменения, происходящего при плавном изменении параметров в любой системе. Таким образом, бифуркация означает переход между пространствами грубых систем.

Переход между грубыми системами осуществляется через негрубые пространства. Многие основополагающие результаты в теории грубости и бифуркации получены А.А.Андроновым и его школой [1, 2].

В работе [1] впервые дано понятие грубости и сформулированы качественные критерии грубости, которое впоследствии, названо понятием грубости по Андронову-Понтрягину [2].

В многомерной постановке рассматривается динамическая система $n$-го порядка

(1) $\dot{\mathbf{z}}(\boldsymbol{t}) = \mathbf{F}(\mathbf{z}(\boldsymbol{t}))$,

где $\mathbf{z}(t) \in R^n$ – вектор фазовых координат; $\mathbf{F}$ – $n$-мерная дифференцируемая вектор-функция.

Система (1) называется топологически грубой по Андронову-Понтрягину в некоторой области $G$, если исходная система и возмущенная система, определенная в подобласти $\widetilde{G}$, области $G$:

(2) $\dot{\tilde{\mathbf{z}}}$À

являются $\varepsilon$ −тождественными в топологическом смысле.

Системы (1) и (2) $\varepsilon$ −тождественны, если существуют открытые области $D$, $\widetilde{D}$ в $n$-мерном фазовом пространстве при $D \subset \widetilde{D} \subset \tilde{G} \subset G$:

∃ε, δ >0:

если $\|\mathbf{f}(\tilde{\mathbf{z}})\| < \delta$, $|\mathbf{df}_i(\tilde{\mathbf{z}})/\mathbf{d}\tilde{\mathbf{z}}_j| < \delta$, $i, j = \overline{1, n}$, то $|\|\mathbf{z}\| - \|\tilde{\mathbf{z}}\|| < \varepsilon$,

или

(3) $(\widetilde{D}, (2)) \overset{\varepsilon}{\equiv} (D, (1))$,

иначе, разбиение областей $\widetilde{D}$и $D$ траекториями систем (2) и (1) $\varepsilon$ −тождественны (имеют одинаковые топологические структуры с траекториями близкими до $\varepsilon$).

Если (3) не выполняется, то система (1) негруба по Андронову-Понтрягину.

Топологическая структура динамических систем определяется особыми траекториями и многообразиями типа: особых точек (положений равновесия); особых линий (сепаратрис); замкнутых периодических траекторий (циклов); притягивающих многообразий (аттракторов).

В работе [5] на основе понятия грубости по Андронову-Понтрягину предложены основы метода топологической грубости на базе меры грубости в виде числа обусловленности $C\{\mathrm{M}\}$ – матрицы М – нормированной матрицы приведения системы каноническому диагональному (квазидиагональному) виду в особых точках фазового пространства.

Условие достижимости максимальной грубости и минимальной негрубости в окрестности особых точек фазового пространства, введенных в [5], определяется следующей теоремой, доказанной в [5].

**Теорема.** *Для того чтобы динамическая система в окрестности гиперболической особой точки* $(\mathbf{z}_{\mathbf{0}})$ *была максимально грубой, а в окрестности негиперболической – минимально негрубой, необходимо и достаточно иметь:*

$$\mathbf{M}^* = argmin\, C\{\mathbf{M}\},$$

*где* М – *матрица приведения матрицы линейной части* А *системы* (1), *в особой точке* $(\mathbf{z}_{\mathbf{0}})$ *к диагональному (квазидиагональному) базису*; $C\{\mathbf{M}\}$ – *число обусловленности матрицы* М.

Теорема сформулирована для общего случая системы (1), когда особая точка $(\mathbf{z}_{\mathbf{0}})$, соответствующая уравнению $\mathbf{F}(\mathbf{z}) = 0$, не вырождена или иначе матрица линейной части А не вырождена. В случае вырожденной в особой точке динамической системы вычисление $C\{\mathbf{M}\}$ вызывает затруднения при диагонализации (квазидиагонализации) базиса матрицы А в силу того, что матрицы обратной к матрице М не существует. Но в этом случае предлагается воспользоваться процедурой псевдообращения матриц [13] и вычислять $C\{\mathbf{M}\}$ по базовому соотношению для числа обусловленности [14]:

(4) $$C\{\mathbf{M}\} = \|\boldsymbol{M}\| \cdot \|\boldsymbol{M}^*\|,$$

где $\|\mathbf{M}\|, \|\mathbf{M}^*\|$ – соответственно какие-либо (обычно спектральные) нормы матриц $\mathbf{M}$ и псевдо обратной матрицы $\mathbf{M}^*$.

Возможности псевдо обращения матриц позволяют сравнивать по грубости близкие по топологическим структурам системы, поскольку как установлено в работах [5, 9] множества грубых и негрубых систем образуют непрерывные множества, для которых показатель грубости $C\{\mathbf{M}\}$ может принимать непрерывные значения от 1 до ∞. В этом случае, предполагается сравнение систем по грубости вводя показатели грубости высокого порядка, а именно 2-го, 3-го и т.д. $n$–го порядка пользуясь процедурой псевдо обращения и формулой (4) для матриц приближения 2-го, 3-го и т.д. $n$ –го порядка в особых точках фазового пространства, которые соответствуют порядкам разложения в классический ряд Тейлора.

## 3. Заключение

Метод топологической грубости, разработанный автором на базе понятия грубости по Андронову-Понтрягину является методом количественного исследования грубости и бифуркаций динамических систем самого широкого класса и различной физической природы. Возможности метода для исследований грубости и бифуркаций систем показаны на примерах многих динамических и синергетических систем [8, 12, 15], при невырожденных особых точках и траекториях фазового пространства. В данной работе предложены подход к исследованиям вырожденных случаев систем, когда матрица линейной части в особых точках вырождена. В этом случае предлагается использование процедур псевдообращения матриц и вычисление числа обусловленности через нормы матриц. Псевдообращение матриц предлагается использовать и в случае сравнения по грубости близких динамических систем вычисляя числа обусловленности высокого порядка.

## Список литературы


1. Андронов А.А., Понтрягин Л.С. Грубые системы // Докл. АН СССР. 1937. Т. 14. № 5. С. 247-250.
2. Аносов Д.В. Грубые системы // Топология, обыкновенные дифференциальные уравнения, динамические системы: Сборник обзорных статей. 2. К 50-летию института (Труды .МИАН СССР.Т. 169). М.: Наука, 1985. С. 59-93.
3. Поляк Б.Т., Цыпкин Я.З. Робастная устойчивость линейных систем // Итоги науки и техники. Сер. Техническая кибернетика. Т. 32. М.: ВИНИТИ, 1991. С. 3-31.
4. Peixoto M.M. On structural stability // Ann. Math. 1959. Vol. 69. No. 1. P. 199-222.
5. Оморов Р.О. Максимальная грубость динамических систем // Автоматика и телемеханика. 1991. № 8. С. 36-45.
6. Оморов Р.О., Ушаков А.В. Оценки робастности в задачах управления и наблюдения // Изв. вузов. Электромеханика. 1991. № 1. С. 78-85.
7. Оморов Р. О. Мера грубости динамических систем и критерии возникновения хаотических колебаний и бифуркаций в синергетических системах // Синтез алгоритмов стабилизации систем: Межведомств. сб.: Вып. 8. Таганрог. 1992. С. 128-134.
8. Оморов Р.О. Теория топологической грубости систем. Бишкек: Илим, 2019. 287 с.
9. Оморов Р.О. Метод топологической грубости динамических систем: Приложения к синергетическим системам // Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики. 2020. Т. 20. № 2. С. 257-262.
10. Оморов Р.О. Синергетические системы: Проблемы грубости, бифуркаций и катастроф // Наука и новые технологии. 1997. № 2. С. 26-36.
11. Omorov R.O. Topological Roughness of Synergetic Systems // Journal of Automation and Information Sciences. 2012. V. 44. P. 61-70.
12. Оморов Р.О. Синергетика и хаос: Топологическая грубость и бифуркации. М.: ЛЕНАНД, 2022. 160 с.
13. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. М.: Наука, 1966. 576 с.
14. Стренг Г. Линейная алгебра и ее применения / Пер. с англ. М.: Мир, 1980. 454 с.
15. Хакен Г. Синергетика: иерархии неустойчивостей в самоорганизующихся системах и устройствах / Пер. с англ. М.: Мир, 1985. 423 с.