УДК 517.9

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ПО ХАЙЕРСУ-УЛАМУ ВОРОНКИ РАЗРЫВНЫХ РЕШЕНИЙ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

А.Н. Сесекин
Уральский федеральный университет
Россия, 620002, Екатеринбург, Мира ул., 19
E-mail: a.n.sesekin@urfu.ru

А.Д. Кандрина
Уральский федеральный университет
Россия, 620002, Екатеринбург, Мира ул., 19
E-mail: anna-kandrina@mail.ru

Ключевые слова: устойчивость по Хайерсу-Уламу, разрывные решения, нелинейные дифференциальные уравнения.

Аннотация: У нелинейных дифференциальных уравнений с обобщенным воздействием в правой части при определенных условиях реакция на обобщенное воздействие является единственной, а при невыполнении этих условий в качестве реакции на обобщенное воздействие возникает интегральная воронка разрывных решений. Рассматривается формализация понятия устойчивости по Хайерсу-Уламу для интегральной воронки разрывных решений нелинейного дифференциального уравнения с обобщенным воздействием в правой части. Получены достаточные условия устойчивости воронки разрывных решений дифференциального уравнения в рамках предложенной формализации понятия устойчивости по Хайерсу-Уламу.

1. Введение

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\dot{x} = f(t,x) + B(t,x)\dot{v}(t). \qquad (1)$$

Здесь $x(t)$, $v(t)$ – соответственно n и m-мерные вектор-функции времени, $f(t,x)$ – n-мерная вектор-функция и $B(t,x)$ – $n \times m$-матрица-функция. Если функция $v(t)$ является абсолютно непрерывной, то при определенных предположениях на $f(t,x)$ и $B(t,x)$ существует единственное решение уравнения (1) на отрезке $[t_0, \vartheta]$, удовлетворяющее начальному условию $x(t_0) = x^0$.

Если же $v(t)$ есть функция ограниченной вариации, то производную в уравнении (1) следует понимать в обобщенном смысле [1]. В этом случае в правой части уравнения (1) возникает некорректная операция умножения разрывной функции на обобщенную. Один из возможных способов решения этой проблемы основан на формализации понятия решения с помощью замыкании множества гладких решений в пространстве функций ограниченной вариации [1]. В связи с тем, что вариация вектор-функции может определяться по разному, отметим, что в этой работе под вариацией m-мерной вектор-функции $v(t)$ понимается

$$\operatorname*{var}_{[t_0,\, t]} v(\cdot) = \sup_T \sum_{i=0}^{k-1} |v(t_{i+1}) - v(t_i)|,$$

где T есть произвольное разбиение отрезка $[t_0, t]$.

В [1–3] было показано, что при определенных предположениях на матрицу-функцию $B(t,x)$ (условия Фробениуса), обобщенное решение, порожденное обобщенным воздействием $\dot{v}(t)$, определяется однозначно. Такое решение в [1, 2] называется аппроксимируемым решением. Определения устойчивости по Хайетсу-Уламу, Хайерсу-Уламу-Рассиасу для дифференциальных уравнений с абсолютно непрерывными траекориями можно посмотреть, например, в [4]. Для формализации импульсных систем Самойленко А.М., Перестюка Н.А. (см. [5]) устойчивость систем по Хайерсу-Уламу рассматривалась в [6]. Исследование свойства устойчивости по Хайерсу-Уламу для уравнения (1) при выполнении условия Фробениуса были проведены в [7–11]. При невыполнении условий Фробениуса реакция уравнения на обобщенное воздействие может быть неоднозначной.

Как и в [1,2], будем называть последовательность $v_k(\cdot)$ V – сходящейся к вектор-функции ограниченной вариации $v(t)$, если $\lim_{k\longrightarrow\infty} v_k(t) = v(t)$ для всех $t \in [t_0, \vartheta]$ и $\lim_{k\longrightarrow\infty} \operatorname*{var}_{[t_0,\, t]} v_k(t) = V(t)$. Такую сходимость будем обозначать как $''v_k(t) \xrightarrow{V} v(t)''$.

Будем называть V – решением уравнения (1) всякий частичный поточечный предел последовательности $x_k(t)$, которая порождается произвольной последовательностью абсолютно непрерывных функций $v_k(t)$, V – сходящейся в $v(t)$.

Заметим, что всякое аппроксимируемое решение является V – решением.

Рассмотрим вспомогательную систему

$$\dot{z}(\xi) = B(t, z(\xi))\eta(\xi), \;\; \dot{\mu}(\xi) = \eta(\xi). \tag{2}$$

В качестве начальных условий для этой системы будем брать

$$z(0) = x(t_i - 0), \;\; \mu(0) = v(t_i - 0)$$

для описания скачков траектории при $t = t_i - 0$ (левый скачек в точке t_i) и

$$z(0) = x(t_i), \;\; \mu(0) = v(t_i)$$

для описания скачков траектории при $t = t_i$ (правый скачек в точке t_i). Обозначим через $S(t, x(t), \Delta v(t), \Delta V(t))$ (где t может принимать значения $t = t_i - 0$ или $t = t_i$) множество, получающееся сдвигом на величину $-x(t)$ в момент $t + \Delta V(t)$ сечения множества достижимости системы (2) при $\mu(\Delta V) = v(t_i)$ в случае левого скачка траектории в точке t_i и $\mu(\Delta V) = v(t_i + 0)$ в случае правого скачка траектории в точке t_i. При этом предполагается, что на правом конце промежутка интегрирования системы (2)

$$\mu(\Delta V(t_i - 0)) = v(t_i), \;\; \mu(\Delta V(t_i + 0)) = v(t_i + 0),$$

где управление $\eta(\xi)$ подчинено ограничению $||\eta(\xi)|| \leqslant 1$.

Теорема 1. *[1,2] Каждый частичный поточечный предел последовательности $x_k(t)$, порожденной последовательностью абсолютно непрерывных функций $v_k(t,)$ $k = 1, 2, \dots$, где $v_k(t) \xrightarrow{V} v(t)$, т.е. $v_k(t) \longrightarrow v(t) \in BV_m[t_0, \vartheta]$, и $\lim_{k\to\infty} \operatorname*{var}_{[t_0,\,t]} v_k(\cdot) = V(t)$ является решением интегрального включения*

$$x(t) \in x^0 + \int\limits_{t_0}^{t} f(\xi, x(\xi))\, d\xi + \int\limits_{t_0}^{t} B(\xi, x(\xi))\, dv^c(\xi) +$$

$$+ \sum_{t_i \leqslant t,\, t_i \in \Omega_-} S(t_i, x(t_i - 0), \Delta v(t_i - 0), \Delta V(t_i - 0)) + \tag{3}$$

$$+ \sum_{t_i < t,\, t_i \in \Omega_+} S(t_i, x(t_i), \Delta v(t_i + 0), \Delta V(t_i + 0)),$$

где $v^c(\xi)$ – непрерывная составляющая функции ограниченной вариации $v(\xi)$, $\Omega_-(\Omega_+)$ – множества точек, в которых функция $V(t)$ разрывна слева (справа).

Для $\forall$ решения $x(t)$ включения (3), порожденного парой $(v(t), V(t))$, $\exists$ $v_k(t) \in AC_m[t_0, \vartheta]$, $v_k(t) \xrightarrow{V} v(t)$, что последовательность соответствующих решений $x_k(t)$, поточечно сходящаяся к $x(t)$ [1, 2]. Интегральную воронку разрывных решений интегрального включения (3) будем обозначать так: $X(t, t_0, x_0, v, V)$.

2. Устойчивость интегрального включения

Особенностью рассматриваемой задачи является то, что, во первых, решения исходного уравнения неограничены, а, во вторых, реакция на обобщенное воздействие неоднозначна. Пусть $\bar{y}(t)$ есть некоторая функция ограниченной вариации, точки разрыва которой совпадают с точками разрыва функции $V(t)$, разрывы функции $\bar{y}(t)$ являются допустимыми для интегрального включения (3). Под этим понимается, что для каждой точки разрыва существует допустимое решение системы (2), с помощью которых описываются скачки функции $\bar{y}(t)$. Это означает, что существуют соответствующие допустимые управления $\eta_{t_i-0}(\cdot)$, $\eta_{t_i+0}(\cdot)$ вспомогательной системы (2), которые обеспечивают нужные скачки траектории

$$\Delta\bar{y}(t_i - 0) = s(t_i, \bar{y}(t_i - 0), \Delta v(t_i - 0)\Delta V(t_i - 0), \eta_{t_i-0} = z(\Delta V(t_i - 0) - \bar{y}(t_i - 0)),$$

$$\Delta\bar{y}(t_i + 0) = s(t_i, \bar{y}(t_i), \Delta v(t_i + 0)\Delta V(t_i + 0), \eta_{t_i+0} = z(\Delta V(t_i + 0) - \bar{y}(t_i)).$$

Пусть $\bar{y}(t)$ удовлетворяет

$$\Bigg|\bar{y}(t) - y_0 - \int\limits_{t_0}^{t} f(\xi, \bar{y}(\xi))\, d\xi - \int\limits_{t_0}^{t} B(\xi, \bar{y}(\xi))\, dv^c(\xi) -$$

$$- \sum_{t_i \leqslant t,\, t_i \in \Omega_-} s(t_i, \bar{y}(t_i - 0), \Delta v(t_i - 0)\Delta V(t_i - 0), \eta_{t_i-0}(\cdot)) - \tag{4}$$

$$-\sum_{t_i<t,\,t_i\in\Omega_+} s(t_i,\bar{y}(t_i),\Delta v(t_i),\Delta V(t_i+0),\eta_{t_i+0}(\cdot))\Bigg| \leqslant \varepsilon.$$

Заметим, что каждое решение интегрального включения (3) описывается решением интегрального уравнения

$$y(t) = y_0 + \int\limits_{t_0}^{t} f(\xi, y(\xi))\,d\xi + \int\limits_{t_0}^{t} B(\xi, y(\xi))\,dv^c(\xi)+$$

$$+\sum_{t_i\leqslant t,\,t_i\in\Omega_-} s(t_i,y(t_i-0),\Delta v(t_i-0)\Delta V(t_i-0),\eta_{t_i-0}(\cdot))+ \tag{5}$$

$$+\sum_{t_i<t,\,t_i\in\Omega_+} s(t_i,y(t_i),\Delta v(t_i),\Delta V(t_i+0),\eta_{t_i+0}(\cdot)).$$

Эти уравнения отличаются набором вспомогательных управлений, с помощью которых описываются скачки траекторий. Содержательно неравенство (4) означает, что $\bar{y}$ является приближенным решением для дифференциального уравнения (1) (воронки разрывных решений интегрального включения (3)), если выполняется неравенство (4).

Определение 1. *Будем говорить, что дифференциальное уравнение (1)(интегральная воронка решений интегрального включения (3)) будет устойчиво по Уламу-Хайерсу, если для любой функции, удовлетворяющей неравенству (4), будет выполняться неравенство*

$$\rho(\bar{y}(t), X(t,t_0,x_0,v,V) \leqslant \varepsilon K,$$

где K некоторая положительная постоянная, $\rho(a,A)$ – хаусдорфово расстояние от точки a до множества A.

Теорема 2. *Пусть выполняются условия теоремы 1. Тогда дифференциальное уравнение (1) устойчиво по Хайерсу-Уламу.*

3. Заключение

Для нелинейного дифференциального уравнения с сбобщенным воздействием в правой части в случае, когда реакция на обобщенное воздействие неединственна, предложена формализация понятия устойчивости по Хайерсу-Уламу и получены достаточные условия, обеспечивающие такой вид устойчивости.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 22-21-00714, https://rscf.ru/project/(№ 22-21-00714).

Список литературы

1. Zavalishchin S.T., Sesekin A.N. Dynamic Impulse Systems: Theory and Applications. Dolrbrecht: Kluwer Academic Publishers, 1997. 233 p.

2. Сесекин А.Н. Динамические системы с импульсной структурой // Труды ИММ УрО РАН. 2000. Т. 6. С. 497–51.
3. Miller B.M., Rubinovich E.Ya. Stability Theory of Differential Equations // Discontinuous solutions in the optimal control problems and their representation by singular space-time transformations, 2013. Vol. 74. P. 1969-2006.
4. Rus I.A. Ulam stability of ordinary differential equations // Studia Uinv. “BABES–BOLYAI”, Mathematica. 2009. Vol. LIV, No. 4, P. 125–133.
5. Самойленко А.М., Перестюк Н.А. Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием. Киев: Вища школа, 1987. 288 с.
6. Wang G.M., Zhou M., Sun L. Hyers-Ulam stability of linear differential equations of first order // Applied Mathematics Letters. 2008. Vol. 21. P. 1024–1028.
7. Кандрина А.Д., Павленко В., Сесекин А.Н. Об устойчивости по Хайерсу-Уламу нелинейных дифференциальных уравнений с разрывными траекториями // Материалы VIII международной конференции «Математика, ее приложения и математическое образование (МПМО 23)». Улан-Удэ: Издательство ВСГУТУ. С. 115-117.
8. Зайнуллина Э.З., Павленко В.С., Сесекин А.Н., Гредасова Н.В. Об устойчивости по Уламу-Хайерсу решений дифференциальных уравнений первого порядка с обобщенным воздействием // Материалы Воронежской международной весенней математической школы «Современные методы теории краевых задач. Понтрягинские чтения–XXXII». Воронеж, 3–9 мая 2021 г. Часть 2. Итоги науки и техн. Сер. Соврем. мат. и ее прил. Темат. обз., **209**. М.: ВИНИТИ РАН, 2022. С. 25–32.
9. Pavlenko V., Sesekin A. Ulam-Hyers Stability of First and Second Order Differential Equations with Discontinuous Trajectories // V.N. Tkhai (Ed.). Proceedings of 2022 16th International Conference on Stability and Oscillations of Nonlinear Control Systems (Pyatnitskiy’s Conference) STAB 2022. IEEE, 2022.
10. Sesekin A.N., Kandrina A.D. Hyers-Ulam-Rassias stability of nonlinear differential equations with a generalized actions on the right-hend side // Ural Mathematical Journal. 2023. Vol. 9, No. 1 (16). P. 147–152.
11. Гредасова Н.В., Павленко В., Сесекин А.Н., Шуляева К.С. Об устойчивости по Хайерсу-Уламу-Рассиасу линейных дифференциальных уравнений с обобщенным воздействием и с запаздыванием // Материалы VIII международной конференции «Математика, ее приложения и математическое образование (МПМО23)». Улан-Удэ: Издательство ВСГУТУ. С. 72–74.