УДК 62-501/-502

СИНЕРГЕТИЧЕСКАЯ ФОРМА ЗАПИСИ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ МЕТОДА МАТЕМАТИЧЕСКОГО ПРОТОТИПИРОВАНИЯ ЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ

И.Е. Старостин
Московский государственный технический университет гражданской авиации
Россия, 125993, Москва, Кронштадтский бул., 20
E-mail: starostinigo@yandex.ru

С.П. Халютин
Московский государственный технический университет гражданской авиации
Россия, 125993, Москва, Кронштадтский бул., 20
E-mail: s.khalutin@mstuca.aero

Ключевые слова: синергетика, метод математического прототипирования энергетических процессов, специальные методы интегрирования систем дифференциальных уравнений, управление системами.

Аннотация: Одним из важнейших подходов в современной теории автоматического управления является геометрический подход, сводящийся к использованию групп отображений в фазовом пространстве состояний, в частности, однопараметрических групп преобразований для группового анализа систем обыкновенных дифференциальных уравнений. В общем случае для получения систем дифференциальных уравнений динамики физических и химических процессов авторами был предложен в рамках механики, электродинамики и современной неравновесной термодинамики метод математического прототипирования энергетических процессов. В настоящей статье рассматривается синергетическая форма записи общего решения системы дифференциальных уравнений предложенного метода, имеющая важное значение для группового анализа и вбирающая в себя особенности процессов в исследуемой системе.

1. Введение

В современной теории автоматического управления важное значение имеет геометрический подход [1], особенно полезный для исследования нелинейных систем автоматического управления, трудности анализа которых общеизвестны. С позиций геометрического подхода пространство состояний системы рассматривается, как топологическое пространство, в котором имеют смысл понятия дифференцирования и интегрирования, а также введены группы преобразований Ли [1]. В частности, широко используется групповой анализ систем обыкновенных дифференциальных уравнений с использованием однопараметрических групп преобразований [1,2]. С помощью замены динамических переменных система дифференциальных уравнений может быть сведена к системам меньшего порядка, которая может быть решена в квадратурах [1, 2]. Упомянутая замена динамических переменных также формируется методами группового анализа [1, 2]. Такой подход решения дифференциальных уравнений является одним из специальных методов решения систем обыкновенных дифференциальных уравнений [3], имеющий важное значение в современной теории автоматического управления [1]. Также групповой анализ систем дифференциальных уравнений дает критерии возможности разложения динамики системы на отдельные составляющие с дальнейшим упрощением анализа динамик системы [1].

В общем случае систем различной физической и химической природы для синтеза систем дифференциальных уравнений динамики физических и химических процессов авторами был предложен в рамках механики, электродинамики и современной неравновесной термодинамики метод математического прототипирования энергетических процессов (ММПЭП) [4]. ММПЭП дает корректные модели исследуемых систем, т.е. модели, не противоречащие общим физическим законам (законам сохранения, началам термодинамики, и т.д.), а также физическим особенностям конкретной системы [4]. В работе [5] были исследованы свойства дифференциальных уравнений ММПЭП, и было показано, что общее решение системы дифференциальных уравнений метода ММПЭП определяет стремление фазовой точки в некоторое стационарное состояние (диссипативная составляющая системы [6]), которое в свою очередь изменяется в результате обратной связи (управляющая составляющая системы [6]) [5]. Также было показано, что аналитическое выражение общего решения систем уравнений ММПЭП, вбирающего в себя упомянутые диссипативную и управляющую составляющие, а также представляющую собой однопараметрическую группу преобразований в случае фиксированных внешних воздействий является решением системы уравнений ММПЭП [5]. Отсюда вытекает корректность аналитического выражения общего решения ММПЭП, вбирающего в себя физические особенности динамики процессов в рассматриваемой системе.

Целью настоящей работы является получение синергетической формы записи аналитического выражения общего решения системы уравнений ММПЭП, вбирающего в себя диссипативные и управляющие составляющие системы. Соответственно, имея предложенную форму записи аналитического выражения, становится возможным исследование динамики системы различной физической и химической природы методами ММПЭП и методами группового анализа.

2. Метод математического прототипирования энергетических процессов

Итак, система уравнений ММПЭП запишется в виде [4,5]:

$$
\begin{cases}
\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = \mathbf{B}\big(\mathbf{x}(t), \mathbf{V}(t)\big)\frac{\delta\Delta\mathbf{x}(t)}{dt} + \left(\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt}\right)_{ext}, \\
\frac{\delta\Delta\mathbf{x}(t)}{dt} = \mathbf{A}\big(\mathbf{x}(t), \mathbf{V}(t)\big)\Delta\mathbf{F}\big(\mathbf{x}(t), \mathbf{V}(t)\big), \\
\Delta\mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{V}) = \mathbf{B}^T(\mathbf{x}, \mathbf{V}) \cdot \mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{V}), \\
\mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{V}) = -\nabla_{\mathbf{x}} W(\mathbf{x}, \mathbf{V}),
\end{cases} \quad (1)
$$

где $\mathbf{x}(t)$ – координаты состояния системы, однозначно характеризующие состояние системы независимо от ее предыстории; $\Delta\mathbf{x}(t)$ – координаты процессов; $\mathbf{B}(\mathbf{x}, \mathbf{V})$ – матрица топологии системы; $(d\mathbf{x}(t)/dt)_{ext}$ – внешние потоки в систему; $\mathbf{V}(t)$ – параметры системы, не изменяющиеся в результате протекания процессов в ней, а изменяющиеся только в результате внешних воздействий на нее; $\mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{V})$ – вектор частных производных свободной энергии $W(\mathbf{x}, \mathbf{V})$ по координатам состояния $\mathbf{x}$; $\mathbf{A}(\mathbf{x}, \mathbf{V})$ – положительно определенная диссипативная матрица (или в случае наличия инерционности невырожденная неотрицательно определенная матрица) [4, 5]. Перекрестные коэффициенты диссипативной матрицы характеризуют перекрестные эффекты (например, термодиффузию, термоэлектричество, перенос механического импульса диффузионным потоком, и т.д.). Система уравнений (1) дополняется уравнениями для измеряемых $\mathbf{y}(t)$ и контролируемых $\mathbf{z}(t)$ параметров системы [4]:

(2) $$\mathbf{y}(t) = \mathbf{Y}[t, \mathbf{x}(t), \mathbf{V}(t)], \mathbf{z}(t) = \mathbf{Z}[t, \mathbf{x}(t), \mathbf{V}(t)],$$

где квадратные скобки означают взятие функционала от временных динамик $\mathbf{x}(t)$ и $\mathbf{V}(t)$.

Для получения решений системы (1) и (2) в численном виде, необходимо знать начальное состояние системы и величины, приведенные в таблице 1 [4].

Таблица 1. Задаваемые характеристики системы и ограничения на них.

Величина, для которой задается функциональное разложение	**Ограничение на задаваемое функциональное разложение**
Матрица топологии системы $\mathbf{B}(\mathbf{x}, \mathbf{V})$	
Частные производные $\mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{V})$ свободной энергии $W(\mathbf{x}, \mathbf{V})$ по координатам состояния $\mathbf{x}$	Условие полного дифференциала свободной энергии $W(\mathbf{x}, \mathbf{V})$ по $\mathbf{x}$
Диссипативная матрица $\mathbf{A}(\mathbf{x}, \mathbf{V})$	Условие положительной определенности

Система уравнений (1) записана в общеэнергетической форме. В работе [7] в числе координат состояния $\mathbf{x}$ были выделены отдельно внутренние энергии энергетических степеней свободы (т.е. внутренние энергии фаз, веществ внутри одной фазы с разными температурами, степеней свободы молекул внутри одного вещества, если температуры степеней свободы молекул одного вещества различаются), а в числе координат процессов отдельно выделены количества перенесенных теплот между энергетическими степенями свободы. Благодаря чему система уравнений (1) может быть записана в термодинамической форме записи, т.е. в форме, в которую явно входят перенесенные теплоты, а также некомпенсированные теплоты и температуры (в общем случае неравновесные) энергетических степеней свободы [7].

3. Синергетическая форма записи решений уравнений метода математического прототипирования

Как отмечалось выше и в [5], динамика, описываемая системой (1), представляет собой стремление фазовой точки к некоторому устойчивому стационарному состоянию, изменяемому в результате обратной связи [5]. Т.е. могут быть заданы такие локальные упрощения уравнений ММПЭП (1), что динамика независимых параметров состояния системы (т.е. не связанных между собой и с параметрами баланса законами сохранения) в каждой области упрощения стремится в стационарное состояние, однако при переходе в другую область упрощения стационарное состояние уже другое (рисунок 1) [5]. Таким образом и образуются колебания в системе [5]. Параметрами баланса могут быть, например, суммарная внутренняя энергия системы, суммарная масса, суммарный импульс системы, и т.д. [5, 7]. Локальные стационарные состояния меняются как в результате перехода системы в новую область упрощения, так и в результате изменения параметров баланса в результате внешних потоков и величин $\mathbf{V}$ [5]. Изменение локальных стационарных состояний с переходом из одной области упрощения в другую область упрощения при фиксированных параметрах баланса и параметрах $\mathbf{V}$ обусловлено переменной диссипативной матрицей [5].

Отсюда, общее решение системы дифференциальных уравнений (1) получается путем сшивки общих решений локально упрощенных уравнений ММПЭП (см. рисунок 1) со стягиваем областей локального упрощения системы уравнений ММПЭП (1) в точку [5]. Полученное путем сшивки общее решение системы (1) будет вбирать в себя условия возникновения автоколебаний [5]: если такие кусочные динамики будут устойчиво приближаться к точке выхода, то возникнут автоколебания [5,8]. Приведенный подход представляет собой развитие метода отображений Пуанкаре [5,8] – основного метода теории динамических систем [8].

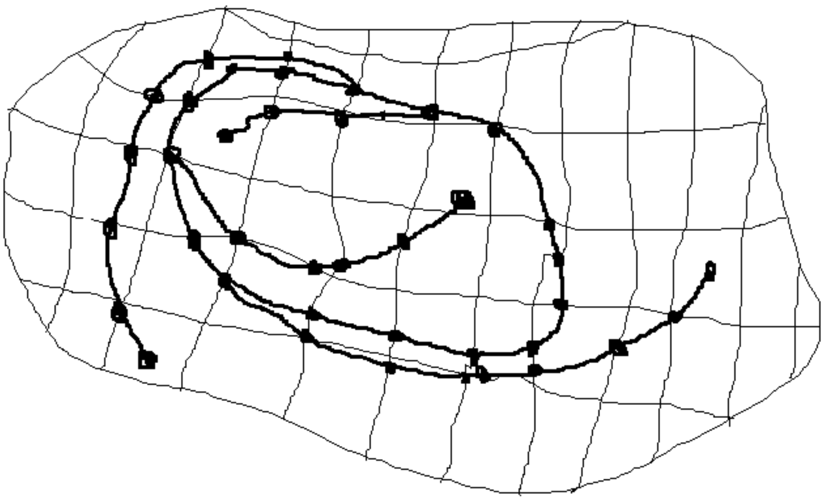

Рис. 1. Механизм возникновения колебаний.

В силу сказанного выше полученное путем сшивки аналитическое выражение общего решения системы уравнений ММПЭП (1) примет вид (видно из [5]):

$$(3)\quad \begin{cases} \mathbf{x}(t) = \tilde{\mathbf{x}}^*\left(\Delta\hat{\mathbf{x}}(t), \hat{\hat{\mathbf{v}}}(t,\hat{\mathbf{v}}), \mathbf{q}_{\text{топ}}, \hat{\hat{\mathbf{s}}}^*\big(\boldsymbol{\epsilon}(\boldsymbol{\epsilon}_0,t), \hat{\hat{\mathbf{v}}}(t,\hat{\mathbf{v}}), \hat{\hat{\mathbf{s}}}\big(\boldsymbol{\epsilon}(\boldsymbol{\epsilon}_0,t), \hat{\hat{\mathbf{v}}}(t,\hat{\mathbf{v}}), \mathbf{q}_{\text{упр}}\big), \mathbf{q}_{\text{упр}}\big)\right), \\ \Delta\hat{\mathbf{x}}(t) = \Delta\tilde{\mathbf{x}}^*\left(\boldsymbol{\epsilon}(\boldsymbol{\epsilon}_0,t), \hat{\hat{\mathbf{v}}}(t,\hat{\mathbf{v}}), \mathbf{q}_{\text{дисс}}, \hat{\hat{\mathbf{s}}}\big(\boldsymbol{\epsilon}(\boldsymbol{\epsilon}_0,t), \hat{\hat{\mathbf{v}}}(t,\hat{\mathbf{v}}), \mathbf{q}_{\text{упр}}\big)\right), \\ \boldsymbol{\epsilon}_0 = \tilde{\mathbf{x}}^{*-1}\big(\mathbf{x}(0), \hat{\hat{\mathbf{v}}}(0,\hat{\mathbf{v}}), \mathbf{q}_{\text{дисс}}, \mathbf{q}_{\text{упр}}, \mathbf{q}_{\text{топ}}\big), \\ \hat{\mathbf{v}} = \hat{\hat{\mathbf{v}}}[\mathrm{V}(t)], \end{cases}$$

где входящие в (3) функции удовлетворяют условиям (видно из [5]):

$$(4)\quad \begin{cases} \forall\boldsymbol{\epsilon}_0\ \boldsymbol{\epsilon}(\boldsymbol{\epsilon}_0,0) = \boldsymbol{\epsilon}_0, \\ \forall\boldsymbol{\epsilon}_0\ \forall t,\tau \in T\ \boldsymbol{\epsilon}(\boldsymbol{\epsilon}_0, t+\tau) = \boldsymbol{\epsilon}(\boldsymbol{\epsilon}(\boldsymbol{\epsilon}_0,\tau),t), \\ \dim(\boldsymbol{\epsilon}) = \dim(\mathbf{x}), \\ \forall\boldsymbol{\epsilon}_0, \mathbf{V}, \mathbf{q}_{\text{дисс}}, \mathbf{s}\ \exists \lim_{t\to+\infty}\left(\Delta\tilde{\mathbf{x}}^*\big(\boldsymbol{\epsilon}(\boldsymbol{\epsilon}_0,t), \mathbf{V}, \mathbf{q}_{\text{дисс}}, \mathbf{s}\big)\right) = \Delta\tilde{\mathbf{x}}^{**}\big(\boldsymbol{\epsilon}_0, \mathbf{V}, \mathbf{q}_{\text{дисс}}, \mathbf{s}\big), \\ \text{из } \left(\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt}\right)_{ext} \equiv 0 \text{ следует } \hat{\hat{\mathbf{s}}}^*\big(\boldsymbol{\epsilon}, \mathbf{s}, \mathbf{V}, \mathbf{q}_{\text{упр}}\big) \equiv \hat{\hat{\mathbf{s}}}^{**}\big(\mathbf{s}, \mathbf{V}, \mathbf{q}_{\text{упр}}\big), \\ \text{из } \mathbf{V}(t) \equiv \mathbf{V} = \text{const следует } \hat{\hat{\mathbf{v}}}(t,\hat{\mathbf{v}}) \equiv \hat{\hat{\mathbf{v}}}(\mathbf{V}), \\ \text{из } \mathbf{s}(t) \equiv \mathbf{s} = \text{const следует } \hat{\hat{\mathbf{s}}}(t, \hat{\hat{\mathbf{s}}}[\mathbf{s}(t)]) \equiv \hat{\hat{\mathbf{s}}}(\mathbf{s}), \end{cases}$$

а параметры $\mathbf{q}_{\text{топ}}$, $\mathbf{q}_{\text{упр}}$, $\mathbf{q}_{\text{дисс}}$ определяются из системы (1). Как видно из (4), выражение (3) вбирает в себя диссипативную часть, задаваемую функцией $\Delta\tilde{\mathbf{x}}^*\big(\boldsymbol{\epsilon}(\boldsymbol{\epsilon}_0,t), \mathrm{V}, \mathbf{q}_{\text{дисс}}, \mathbf{s}\big)$, управляющую часть, задаваемую функциями $\hat{\hat{\mathbf{s}}}\big(\boldsymbol{\epsilon}, \mathbf{v}, \mathbf{q}_{\text{упр}}\big)$ и $\hat{\hat{\mathbf{s}}}^*\big(\boldsymbol{\epsilon}, \mathbf{v}, \hat{\hat{\mathbf{s}}}, \mathbf{q}_{\text{упр}}\big)$, и топологическую часть, задаваемую функцией $\tilde{\mathbf{x}}^*\big(\Delta\mathbf{x}, \mathbf{v}, \mathbf{q}_{\text{топ}}, \hat{\hat{\mathbf{s}}}^*\big)$ [5,6]. Причем параметры $\mathbf{q}_{\text{дисс}}$ и $\mathbf{q}_{\text{топ}}$ определяются внутренними свойствами системы, а параметры $\mathbf{q}_{\text{упр}}$ внутренними свойствами системы и внешними потоками (видно из [5]). Более того, из (3) и (4) видно, что в случае $\mathbf{V} = \text{const}$ аналитические выражения (3) удовлетворяют аксиомам однопараметрической группы отображений [1, 2].

В силу асимптотической устойчивости функции $\Delta\tilde{\mathbf{x}}^*\big(\boldsymbol{\epsilon}(\boldsymbol{\epsilon}_0, t),\mathrm{V}, \mathbf{q}_{\text{дисс}}, \mathbf{s}\big)$ диссипативной части функция $\Delta\tilde{\mathbf{x}}^*\big(\boldsymbol{\epsilon}(\boldsymbol{\epsilon}_0, t),\mathrm{V}, \mathbf{q}_{\text{дисс}}, \mathbf{s}\big)$ может быть задана виде разложения в асимптотически устойчивых экспонент [9].

Таким образом, задание аналитического выражения общего решения системы (1) в виде (3) и (4) дает возможность задания преобразованной модели системы, заданной в виде (2) – (4). К такой модели в силу описанных выше свойств (3) могут быть применены описанные в [1] методы построения алгоритмов управления. Более того, т.к. аналитическое выражение (3) общего решения системы (1) получается путем сшивки общих решений локально упрощенной системе (1) со стягиванием в точку областей локального упрощения (1), то в силу общности ММПЭП, исходя из метода аналогий [10], возможно для построения аналитического выражения общего решения использовать полученные ранее выражения (3) и (4) для упрощенной (1) с соответствующими функциями для приведенных в таблице 1 величин [11].

4. Заключение

Итак, предложенная в настоящей работе форма (3) представления общего решения системы дифференциальных уравнений ММПЭП (1) является одной из математических основ современных методов теории автоматического управления. Также предложенная форма (3) существенно упрощает численное интегрирование системы (1), являясь развитием специальных методов интегрирования систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Соответственно для дальнейшего развития предложенной формы записи (3) необходимо совершенствовать методы построения функций, входящих в (3), удовлетворяющих ограничениям (4), а также задания аналитических выражений для $\mathbf{q}_{\text{дисс}}$, $\mathbf{q}_{\text{топ}}$, $\mathbf{q}_{\text{упр}}$ на основе теории групп Ли и методов теории динамических систем.

Список литературы

1. Пупков К.А., Егупов Н.Д., Баркин А.И. и др. Методы классической и современной теории автоматического управления. Т. 3. Методы современной теории автоматического управления. М.: Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2000. 748 с.
2. Арнольд В.И. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Ижевск: Ижевская республиканская типография, 2000. 368 с.
3. Калиткин Н.Н. Численные методы. М.: Наука, 1978. 512 с.
4. Khalyutin S.P., Starostin I.E., Agafonkina I.V. Generalized method of mathematical prototyping of energy processes for digital twins development // Energies. 2023. Vol. 16, No. 4. P. 1933.
5. Starostin I.E., Khalyutin S.P., Druzhinin A.A. Vibration Analysis Based on the Method of Mathematical Prototyping of Energy Processes // International Conference of Young Specialists on Micro/Nanotechnologies and Electron Devices. EDM. 2023. P. 1650.
6. Шапиро С.В. Основы синергетики. Уфа: УГАЭС, 2012. 200 с.
7. Старостин И.Е., Халютин С.П., Париевский В.В. Виды и формы представления основных уравнений метода математического прототипирования энергетических процессов // Электропитание. 2022. № 4. С. 4-14.
8. Кузнецов А.П., Кузнецов С.П., Рыскин Н.М. Нелинейные колебания. М.: Физматлит, 2002. 292 с.
9. Демидович Б.П. Лекции по математической теории устойчивости. М.: Наука, 1967. 472 с.
10. Антонов А.В. Системный анализ. М.: Высшая школа, 2004. 454 с.
11. Малинецкий Г.Г. Математические основы синергетики: Хаос, структуры, вычислительный эксперимент. М.: Ленанд, 2017. 312 с.