УДК 517.925.5+519.65

ПРИМЕНЕНИЕ ЧИСЛЕННЫХ МЕТОДОВ В РЕШЕНИИ ЗАДАЧ ЛОКАЛИЗАЦИИ

О.С. Ткачева
Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН
Россия, 117997, Москва, Профсоюзная ул., 65

МГТУ им. Н.Э. Баумана
Россия, 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., 5, стр. 1
E-mail: tkolga17@ipu.com

А.Н. Канатников
МГТУ им. Н.Э. Баумана
Россия, 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., 5, стр. 1
E-mail: skipper@bmstu.ru

Ключевые слова: функциональный метод локализации, численные методы, качественный анализ систем, локализирующее множество.

Аннотация: В работе обсуждаются численные методы решения задач локализации. Ключевой проблемой в таких задачах является построение универсального сечения, которое задается неявно. Известный метод численного построения универсального сечения имеет высокую вычислительную сложность. Предложены варианты модификации метода, позволяющие заметно снизить вычислительную сложность.

1. Введение

В качественном анализе динамических систем хорошо себя показал функциональный метод локализации, который позволяет строить множества в фазовом пространстве системы (локализирующие множества), содержащие все инвариантные компактные множества системы (включая положения равновесия, циклы, сепаратрисы, аттракторы и репеллеры). Однако этот метод основан в основном на аналитических выкладках, что существенно ограничивает его возможности. Применение численных методов позволило бы повысить эффективность функционального метода локализации.

Говоря в общем, при решении задач локализации необходимо описание поверхности уровня некоторой функции и нахождение точной верхней или нижней грани некоторой функции на такой поверхности уровня. Может показаться, что задача сводится к решению систем нелинейных уравнений или задач математического программирования. Однако это не так, поскольку известные методы решения задач математического программирования в основном ориентированы на регулярные целевые функции и регулярные ограничения, а в задачах локализации это зачастую не так. Поэтому требуется разработка новых методов или, как минимум, адаптация известных методов.

Кратко остановимся на основных моментах функционального метода локализации [1, 2]. Рассмотрим динамическую систему вида:

$$(1) \qquad \dot{x} = F(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n.$$

Подмножество $G \subset \mathbb{R}^n$ называют инвариантным множеством системы (1), если для любой точки $x_0 \in G$ траектория $x(t, x_0)$, проходящая через точку x_0 и определенная на максимальном интервале времени, содержится в G.

Пусть $\varphi \in C^1(\mathbb{R}^n)$ – гладкая функция и $\dot{\varphi}(x) = \varphi'(x)F(x)$ – ее производная в силу системы (1). Подмножество $S(\varphi) = \{x \in \mathbb{R}^n : \dot{\varphi}(x) = 0\}$ называют универсальным сечением [1, 2]. Для произвольного множества $Q \subset \mathbb{R}^n$ положим

$$\varphi_{\inf}(Q) = \inf\{\varphi(x) : x \in S(\varphi) \cap Q\}, \quad \varphi_{\sup}(Q) = \sup\{\varphi(x) : x \in S(\varphi) \cap Q\}.$$

Тогда все инвариантные компакты системы (1), целиком содержащиеся в множестве Q, содержатся в подмножестве $\Omega(\varphi, Q) = \{x \in \mathbb{R}^n : \varphi_{\inf}(Q) \leqslant \varphi(x) \leqslant \varphi_{\sup}(Q)\}$. Множество $\Omega(\varphi, Q)$ называют локализирующим для системы (1), а функцию φ, порождающую это множество, – локализирующей.

Строить локализирующее множество можно с помощью последовательного применения нескольких локализирующих функций. Рассмотрим последовательность функций $\varphi_k \in C^1(\mathbb{R}^n)$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ и некоторое множество $Q \subset \mathbb{R}^n$. Положим $Q_0 = Q$, $Q_k = \Omega(\varphi, Q_{k-1})$, $k = 1, 2, \ldots,$ и $Q_\infty = \bigcap_{k=1}^{\infty} Q_k$. Тогда $Q_1 \supset Q_2 \supset \cdots \supset Q_\infty$ и, кроме того, все инвариантные компактные множества, целиком лежащие в Q, также содержатся в Q_∞.

Таким образом, построение локализирующего множества сводится к поиску экстремальных значений локализирующей функции на части универсального сечения, соответствующего этой локализирующей функции. Такую задачу можно сформулировать как некую экстремальную задачу, называемую ассоциированной задачей на условный экстремум:

$$(2) \qquad \varphi(x) \to \mathrm{extr}, \quad \dot{\varphi}(x) = 0, \quad x \in Q.$$

Решение задач локализации позволяет разделить фазовое пространство системы на области со сложным и относительно простым поведением. В частности, можно выделить определенные типы поведения траекторий [3]. Кроме того, метод применим для решения задач устойчивости, в том числе выявления случаев глобальной асимптотической устойчивости [4]. Однако серьезным ограничением функционального метода локализации является то, что до настоящего времени все расчеты проводятся аналитически. Применение численных методов позволило бы получить результат в тех случаях, когда такие аналитические вычисления невозможны.

Решение ассоциированной задачи на условный экстремум (2) не сводится к поиску точек условного локального экстремума – задаче, для которой и аналитические, и численные методы развиты хорошо. Во-первых, точная верхняя или точная нижняя грани локализирующей функции на универсальном сечении могут не достигаться, а во-вторых, универсальное сечение может не быть регулярной поверхностью (кривой). Требуются специфические методы решения задачи.

Так как в ассоциированной задаче на условный экстремум требуются только экстремальные значения функции, но не способы их достижения, то универсальное сечение удобно представить как неупорядоченное множество точек, которое, с одной стороны, относительно невелико, а с другой достаточно плотно: в окрестности определенного размера любой точки из $S(\varphi) \cap Q$ должна быть точка представляющего размера.

При указанном представлении универсального сечения поиск экстремальных значений (разумеется, приближенных) сводится к поиску минимума или максимума функции на конечном множестве и проблем не вызывает. В результате основная проблема в решении задачи локализации оказывается в построении аппроксимирующего множества точек. Следует отметить, что для каждой локализирующей функции построение аппроксимирующего множества выполняется однократно, а реализация итерационной процедуры сводится к манипулированию уже построенными конечными множествами.

2. Базовый численный метод построения универсального сечения

Метод построения части универсального сечения, расположенной в заданном ограниченном множестве $Q \subset \mathbb{R}^n$, описан в [5]. Множество Q накрывается равномерной сеткой с узлами $x^{i_1 i_2,\ldots i_n} = (x_1^{i_1}, x_2^{i_2}, \ldots, x_n^{i_n}$, где $x_j^{i_j} = a_j + hi_j$, $j = \overline{1,n}$, с параметром сетки h, определяющим, насколько сетка является мелкой. Для каждого узла сетки $x^{i_1 i_2,\ldots i_n}$ численно решается уравнение $\dot{\varphi}(x) = 0$ со стартовым значением $x^{i_1 i_2,\ldots i_n}$. Если алгоритм привел к некоторой точке x_*, в которой выполнено неравенство $|\dot{\varphi}(x_*)| < \delta$ ($\delta > 0$ – еще один параметр метода), то точка x_* включается в аппроксимирующее множество. Также отбрасываются решения, выходящие за пределы множества Q.

Численное решение уравнения $\dot{\varphi}(x) = 0$ можно осуществлять любым известным методом. Самый простой подход – свести задачу к задаче минимизации функции $(\dot{\varphi}(x))^2$ и применить один из методов спуска для задач безусловной минимизации, например, алгоритм Левенберга – Марквардта.

Как известно методы спуска сходятся не всегда. Кроме того, метод может сходиться к точке локального минимума, в которой функция отлична от нуля. Отметим также, что для достаточно сложной функции даже близко расположенные стартовые точки могут приводить к сильно различающимся результатам. В итоге аппроксимирующее множество получится из неравномерно распределенных точек: где-то они будут располагаться слишком плотно, а где-то – слишком редко. Первую проблему можно решить, отбрасывая часть точек, например, последовательно просматривая точки множества, удалять те, которые расположены близко к текущей (на расстоянии не более некоторого δ). Вторую проблему можно парировать, уменьшив шаг сетки.

Предложенный алгоритм имеет довольно высокую вычислительную сложность. Численное решение уравнения $\dot{\varphi} = 0$ является итерационным, скорость сходимости метода, а значит, и количество операций зависит от характера функции. При этом процедура численного решения запускается k^n раз, где k – количество узлов сетки по одной координате. В то же время количество стартовых точек явно избыточно, Метод можно модифицировать так, чтобы его вычислительная сложность уменьшилась.

3. Усиление базового метода

Основной подход, направленный на усиление базового метода построения универсального сечения, состоит в сокращении количества узлов сетки, для которых решается уравнение $\dot{\varphi} = 0$. Этот подход должен учитывать две противоположные тенденции. Аппроксимирующее множество не должно содержать чрезмерное количество точек, чтобы не увеличивать объем последующих вычислений. В то же время слишком малое количество точек приведет к снижению точности вычисления экстремальных значений локализирующей функции.

Выделим три метода выбора точек для решения уравнения. Первый метод простейший и заключается в том, что если для данного узла сетки x_s численное решение на универсальном сечении найдено, отбрасываем оставшиеся узлы из некоторой окрестности точки x_s. Регулирующим параметром метода является радиус окрестности. Основанием такого подхода является следующий довод: близкие стартовые точки приведут к близким же решениям уравнения $\dot{\varphi} = 0$.

Вторая стратегия основана на расхождении стартовой точки x_s и итоговой x_* в процессе решения уравнения $\dot{\varphi} = 0$. Если $\|x_* - x_s\| > \rho$ для некоторого параметра ρ, то точки из некоторой окрестности точки x_s можно не рассматривать. Такая стратегия базируется на предположении, что в процессе решения уравнения мы получим точку x_*, ближайшую к x_s или близкую к этой ближайшей.

Третий метод основан на том, что в окрестности нуля функции типично изменение знака этой функции (исключением является нуль функции, оказывающийся локальным экстремумом). Можно проверить знаки функции $\dot{\varphi}$ в текущем узле x_s и ближайших узлах. Если все значения функции имеют один знак, то в окрестности точки x_s нет точек универсального сечения и запускать численный метод решения уравнения из точки x_s не нужно.

В рамках третьего метода можно предложить и такую модификацию. Из рассмотрения как стартовых следует исключить такие узлы x_s, в которых $|\dot{\varphi}(_s)| > \rho$, где параметр ρ выбирается в зависимости от шага сетки и максимально возможного значения нормы градиента функции $\dot{\varphi}$.

Каждый из предложенных методов не является абсолютно надежным, поскольку может приводить к потере некоторых частей универсального сечения. Работоспособность и эффективность этих методов будут выявляться в рамках вычислительных экспериментов с различными вариантами систем и локализирующих функций.

Список литературы

1. Канатников А.Н., Крищенко А.П. Инвариантные компакты динамических систем. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2011. 231 с.
2. Крищенко А.П. Локализация инвариантных компактов динамических систем // Дифференц. уравнения. 2005. Т. 41, № 12. С. 1597–1604.
3. Канатников А.Н., Крищенко А.П. Локализирующие множества и поведение траекторий // Докл. АН. 2016. Т. 470, № 2. С. 133–136.

4. Starkov K.E., Kanatnikov A.N. Eradication Conditions of Infected Cell Populations in the 7-Order HIV Model with Viral Mutations and Related Results. Mathematics. 2021. Vol. 9ю P. 1862.
5. Воркель А.А., Крищенко А.П. Численное исследование асимптотической устойчивости положений равновесия // Математика и математическое моделирование. 2017. № 3. С. 44–63.