УДК 62-50

ИССЛЕДОВАНИЕ ОБЛАСТИ АСИМПТОТИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ ЛИНЕАРИЗОВАННОЙ СИСТЕМЫ В ЗАДАЧЕ СТАБИЛИЗАЦИИ ВЕРТИКАЛЬНОГО ПОЛОЖЕНИЯ МАЯТНИКА НА КОЛЕСЕ

Б.А. Барулин
Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН
Россия, 117997, Москва, Профсоюзная ул., 65
e-mail: barulin.ba@phystech.edu

Ключевые слова: Асимптотическая устойчивость, перевернутый маятник, метод линеаризации обратной связью по выходу.

Аннотация: В данной работе исследуется область изменения параметров стабилизирующих законов управления для механической системы, состоящей из колеса и маятника, подвешенного на его оси. Цель управления состоит в одновременной стабилизации вертикального положения маятника и заданного положения колеса. Сложность этой задачи состоит в том, что одно управление служит для достижения двух целей - стабилизации угла отклонения маятника и угла поворота колеса. Используется метод линеаризации обратной связью по выходу. В качестве выхода берется сумма угла отклонения маятника и угла поворота колеса. Для того, чтобы замкнутая система была не только асимптотически устойчивой по выходу, но и обладала асимптотически устойчивой нулевой динамикой, к закону управления, стабилизирующему по выходу, добавляется диссипативное слагаемое, а также вводится положительный множитель — коэффициент усиления управления. Исследуется область асимптотической устойчивости ситемы при более общей параметризация закона управления.

1. Введение

Настоящая работа является продолжением [1], в которой показано, что если в качестве выхода взять сумму угла отклонения маятника и приведенного угла поворота колеса и синтезировать управление, стабилизирующее по этому выходу, то замкнутая система окажется устойчивой, хотя и не асимптотически. Стабилизация нулевого состояния получается добавлением к управлению слагаемого, пропорционального разнице угловых скоростей колеса и маятника и имеющего смысл момента вязкого трения в оси колеса.

Механическая система, рассматриваемая в работе, состоит из колеса и маятника, подвешенного на его оси (рис. 1).

Эта система, а также система, состоящая из тележки с перевернутым маятником, исследуется во многих работах по теории управления, см. например [2-9]. Отметим, что эта система привлекает интерес как нелинейная, неустойчивая и неминимально фазовая система на которой исследуются различные методы синтеза управления.

В данной работе предложена двухпараметрическая модификация закона управления, полученного методом линеаризации обратной связи по выходу. Наряду с диссипативным слагаемым, имеющим смысл момента силы вязкого трения в точке подвеса, предлагается ввести положительный множитель перед законом управления. Более общая параметризация позволяет стабилизировать данную систему в случаях, когда использование ранее предложенного закона не давало результата.

2. Описание модели перевернутого маятника на колесе

Используем математическую модель, описанную в [2] с обозначениями, введенными в [1]. Кроме того, используется введенная в последней работе замена переменной времени. Положительное значение углов отсчитывается против часовой стрелки. Итак, пусть ξ – это положения центра колеса на горизонтальной оси рис. 1; φ – угловое отклонение маятника от вертикальной оси; l – длина маятника; ψ – угол между вертикалью и некоторым выделенным радиусом колеса, $\psi = \frac{-\xi}{r}$; m – это масса, сосредоточенная на конце маятника; M, J, r – масса, момент инерции и радиус колеса соответственно; $\beta = \frac{M+\frac{J}{r^2}}{m}$ – приведенная масса, $\theta = \frac{-\xi}{l} = \psi\frac{r}{l}$ – приведенный угол поворота колеса; U – это момент силы, развиваемый приводом и приложенный между маятником и колесом; $u = \frac{U}{mgl}$ – новая безразмерная переменная управления; t – время и $\tau = t\sqrt{g\,/\,l}$ – новая безразмерная независимая переменная; ' – производная по переменной $\tau = t\sqrt{g\,/\,l}$.

Обозначим угловые скорости $\varphi' = \omega\theta' = \delta x = (\varphi, \omega, \theta, \delta)^T$.

Использовние Лагранжева формализма и независимой переменной τ, дает уравнения движения в виде (см. [1])

$$(1)\qquad \begin{cases} \varphi' = \omega \\ \omega' = f_1(x) + h_1(x)u \\ \theta' = \delta \\ \delta' = f_2(x) + h_2(x)u \end{cases}$$

где $f_1(x) = \frac{sin\varphi}{d}\left(-\varphi'^2 cos\varphi + 1 + \beta\right), f_2(x) = \frac{sin\varphi}{d}(\varphi'^2 - cos\varphi), h_1(x) = \frac{1}{d}(cos\varphi + 1 + \beta), h_2(x) = \frac{1}{d}(-cos\varphi - 1)$.

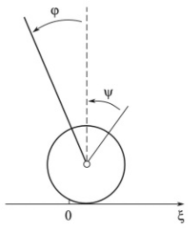

Рис. 1. Схема маятника на колесе.

Основной задачей данной работы является исследование области асимптотической устойчивости, полученной при двупараметрическом расширении закона управления.

3. Синтез управления, стабилизирующего нулевое состояние равновесия системы

Выберем в качестве выхода системы

$$(2)\qquad y = \varphi + \theta,$$

и синтезируем управление системой (1), гарантирующее асимптотическую устойчивость по этому выходу. получим выражение для закона управления:

(3) $$u(x) = \frac{-d\lambda^2(\varphi+\theta)+2d\lambda(\varphi'+\theta')+sin\varphi[(1-cos\varphi)(\varphi'^2+1)+\beta]}{\beta}$$

Перейдем к синтезу закона управления, обеспечивающего асимптотическую устойчивость замкнутой системы (1), добавив к закону управления малое диссипативное слагаемое и введя коэффициент усиления управления.

Модифицированный закон управления имеет вид:

(4) $$u^*(x) = su(x) - k(\omega - \delta),$$

где $u(x)$ – управление из (3), гарантирующее устойчивость нулевого положения равновесия системы; $k > 0$ - коэффициент диссипации, $s > 0$ – коэффициент усиления управления.

Далее, осуществим линеаризацию системы (1) при $\varphi, \theta \to 0$. Тогда уравнения движения, описывающие систему приобретают вид:

(5) $$\begin{cases} \varphi' = \omega \\ \omega' = \left[\frac{1+\beta}{\beta} - \frac{2+\beta}{\beta}s(\lambda^2+1)\right]\varphi + \frac{2+\beta}{\beta}(-2\lambda s - k)\omega - -\frac{2+\beta}{\beta}s\lambda^2\theta + \frac{2+\beta}{\beta}(k-2\lambda s)\delta \\ \theta' = \delta \\ \delta' = \left[\frac{-1}{\beta} + \frac{2}{\beta}s(\lambda^2+1)\right]\varphi + \frac{2}{\beta}(2\lambda s + k)\omega + \frac{+2}{\beta}s\lambda^2\theta - \frac{2}{\beta}(k-2\lambda s)\delta \end{cases}.$$

Для линеаризованной системы получим ее характеристический полином:

(6) $$P(z) = z^4 + \frac{(2\lambda s+k)\beta+4k}{\beta}z^3 + \frac{(s\lambda^2+s-1)\beta+2s-1}{\beta}z^2 + \frac{2\lambda s-k}{\beta}z + \frac{s\lambda^2}{\beta}.$$

Его матрица Гурвица имеет вид:

(7) $$\begin{pmatrix} \frac{(2\lambda s+k)\beta+4k}{\beta} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{2\lambda s-k}{\beta} & \frac{(s\lambda^2+s-1)\beta+2s-1}{\beta} & \frac{(2\lambda s+k)\beta+4k}{\beta} & 1 \\ 0 & \frac{s\lambda^2}{\beta} & \frac{2\lambda s-k}{\beta} & \frac{s\lambda^2}{\beta} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{s\lambda^2}{\beta} \end{pmatrix}$$

Согласно Критерию Льенара-Шипара нулевое решение системы (5) асимптотически устойчиво тогда и только тогда, когда положительны все коэффициенты перед степенями аргумента характеристического полинома (6), а также все нечетные главные диагональные миноры матрицы Гурвица (7). [10]

Таким образом, для асимптотической устойчивости линеаризованной системы (5) необходимо и достаточно выполнение следующих условий:

(8) $$\begin{cases} 2\lambda s - k > 0 \\ \left((\beta^2+0.5)(\beta+4)s - \frac{\beta}{2} - 1\right)k^2 + +2s(1+(\lambda^2\beta-2)s)\lambda k - 2\lambda^2 s^2\beta(s-1) < 0 \end{cases}.$$

Исследуем обе функции, задающие систему (8) в осях координат (s, k).

В настоящем исследовании, исходя из физического смысла коэффициента диссипации и коэффициента усиления управления, интерес представляет задача построения областей асимптотической устойчивости в той части пространства (s, k), где выполняются следующие условия:

(9) $$\begin{cases} k > 0 \\ s > 0 \end{cases}$$

Исследуем функции из системы (8) на точки пересечения. Для этого подставим $k = 2\lambda s$ во второе уравнение системы. Получим:

(10) $$\left((\beta^2 + 0.5)(\beta + 4)s - \frac{\beta}{2} - 1\right) 2\lambda^2 s^2 + 2s(1 + (\lambda^2\beta - 2)s)\lambda^2 s - -2\lambda^2 s^2 \beta(s - 1) = 0$$

После упрощения данное уравнение приобретает вид:

(11) $$-8\lambda^4 s^3(\beta + 2) = 0.$$

Учитывая положительность значений параметров системы λ и β, единственным решением уравнения является:$s = 0$. Тогда единственной точкой пересечения графиков гиперболы и линейной функции в осях координат (s, k) является точка $(0,0)$ вне зависимости от значений параметров системы $\lambda и \beta$. Полученные результаты позволяют построить области асимптотической устойчивости при различных значениях параметров системы λ, β:

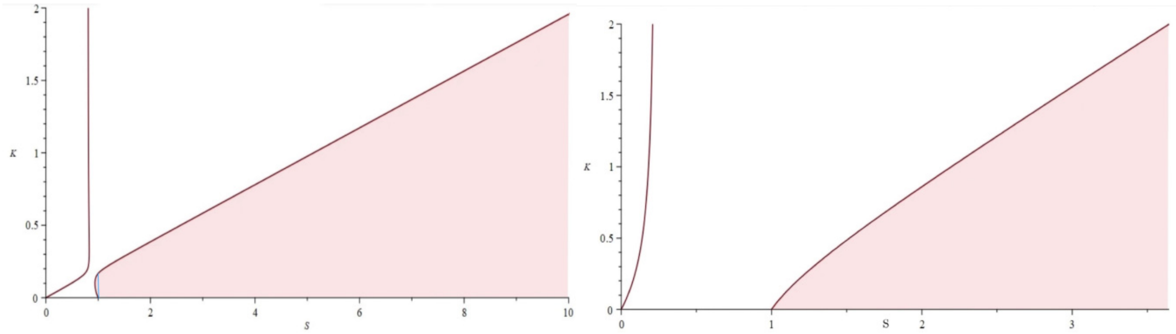

Рис. 2 и 3. Области асимптотической устойчивости системы при $\lambda = 0.1, \beta = 7$ (слева) и при $\lambda = 1, \beta = 3$ (справа).

4. Заключение

В работе предложено двухпараметрическое расширение закона управления, стабилизирующего одновременно угол отклонения маятника от вертикали и угол поворота колеса, и исследованы области асимптотической устойчивости линеаризованной системы в пространстве этих параметров. Исследовав полученные области, можем сделать вывод о том, что модифицированный закон управления стабилизирует систему при более широком выборе значений коэффициента диссипации, чем в ранее опубликованной работе [1] (рис. 2), а также позволяет достичь асимптотической устойчивости при такой комбинации параметров системы λ, β, при которой стабилизация ранее предложенным законом невозможна (рис. 3)

Список литературы

1. Рапопорт Л.Б., Генералов А.А. Управление перевернутым маятником на колесе // Автоматика и телемеханика. 2022. № 8.
2. Мартыненко Ю.Г., Формальский А.М. Управляемый маятник на подвижном основании // Механика твердого тела. 2013. № 1.
3. Формальский А.М. Управление движением неустойчивых объектов. М.: Физматлит, 2012.
4. Халил Х.К. Нелинейные системы. Москва-Ижевск: ИКИ-РХД, 2009.
5. Utkin V.I., Guldner J., Shi J. Sliding mode control in electro-mechanical systems. CRC Press. 2009.
6. Jung-Su Ha, Ju-Jang Lee. Position Control of Mobile Two Wheeled Inverted Pendulum Robot by Sliding Mode Control // Proceedings of 12th International Conference on Control, Automation and Systems. 2012. P. 715–719.
7. Пестерев А. В., Морозов Ю.В. Стабилизация тележки с перевернутым маятником // Автоматика и телемеханика. 2022. № 1. С. 95-112.
8. Teel A.R. A nonlinear small gain theorem for the analysis of control systems with saturation // IEEE.Trans. Autom. Contr. 1996. Vol. AC-41, No. 9. P. 1256-1270.
9. Решмин С.А., Черноусько Ф.Л. Оптимальный по быстродействию синтез управления нелинейным маятником // Известия РАН. ТИСУ. 2007. № 1. С. 13-22.

10. Филиппов А.Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям. Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, 2000.