.

УДК 62-50

СРАВНЕНИЕ НАИХУДШИХ ВОЗМУЩЕНИЙ ДВУХ КЛАССОВ ДЛЯ ОСЦИЛЛЯТОРА С КВАДРАТИЧНЫМ ДЕМПФИРОВАНИЕМ

Н.Н. Болотник

Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН

Россия, 119526, Москва, пр-т Вернадского, д. 101, корп. 1

E-mail: bolotnik@ipmnet.ru

В.А. Корнеев

Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН

Россия, 119526, Москва, пр-т Вернадского, д. 101, корп. 1

E-mail: korneev@ipmnet.ru

Ключевые слова: оптимальное управление, осциллятор с квадратичным демпфированием, наихудшие возмущения

Аннотация: Для осциллятора с квадратичным демпфированием строятся наихудшие возмущения для двух различных классов однонаправленных возмущений заданной суммарной интенсивности и проводится их сравнение по наибольшему значению максимума модуля смещения (по времени) тела осциллятора от положения равновесия. В первом классе возмущений возмущения представляют собой два последовательных однонаправленных мгновенных удара заданной суммарной интенсивности. Второй класс возмущений представляет собой возмущения прямоугольного профиля с заданным импульсом.

1. Механическая система и постановка задачи.

При решении задач об оптимальной противоударной гарантированной защите объектов, размещенных на подвижном подверженным ударам основании, возникает необходимость решать задачу о наихудшем возмущении. Различные методы и подходы к решению проблемы противоударной изоляции достаточно полно изложены в [1–6]. Самыми распространенными пассивными противоударными изоляторами являются простые изоляторы с линейной пружиной и демпфером с линейной или квадратичной характеристикой. В данной работе рассмотрим пассивный изолятор с квадратичным демпфированием, для которого движение изолируемого объекта относительно основания описывается уравнением

$$m\ddot{x} + k|\dot{x}|\,\dot{x} + cx = v(t), \quad v = -mw(t). \tag{1}$$

Здесь m – масса защищаемого объекта, w – ускорение объекта относительно неподвижной системы координат, x – координата объекта относительно основания, k – коэффициент жесткости, c – коэффициент демпфирования. Величину mw рассматриваем как внешнее возмущение.

Введем однопараметрический класс V_a возмущений, содержащих два мгновенных удара, направленных в одну сторону и имеющих суммарный импульс v_0:

$$V_a = \{v_a(t): \ v_a(t) = a\delta(t) + (v_0 - a)\delta(t - t_a), \\ 0 \leqslant a \leqslant v_0, \ 0 \leqslant t_a \leqslant t_a^*\} \tag{2}$$

Здесь t_a^* первый момент обращения скорости в 0 после действия возмущения $v(t) = a\delta(t)$.

Предполагаем, что начальные условия нулевые, т.е.

$$x(0) = 0, \ \dot{x}(0) = 0, \tag{3}$$

Задача 1. Для механической колебательной системы, задаваемой дифференциальным уравнением (1) с нулевыми начальными условиями (3) найти функцию $v(t)$, которая принадлежит классу V_a и максимизирует функционал

$$J(v) = \max_{t\in[0,\,\infty)} |x_a(t)|.$$

Здесь $x_a(t)$ – решение уравнения (1) при начальных условиях (3) и заданном возмущении $v_a(t)$.

Задача 2. Для механической колебательной системы (осциллятора), описываемой дифференциальным уравнением (1) с нулевыми начальными условиями (3) найти функцию $v(t) = v_b(t)$ из однопараметрического класса V_b возмущений "прямоугольного" профиля вида

$$v_b(t) = \begin{cases} b, & t \in [0,\, v_0/b], \\ 0, & t > v_0/b, \end{cases} \qquad b > 0, \tag{4}$$

которая максимизирует функционал

$$J_1(v) = \max_{t\in[0,\,\infty)} |x_v(t)|. \tag{5}$$

Здесь b – параметр, определяемый из условия максимизации функционала J_1, v_0 – заданный импульс внешнего воздействия, $x_v(t)$ – решение уравнения (1) при начальных условиях (3) и заданном возмущении $v = v_b(t)$.

С целью уменьшения числа определяющих параметров введем безразмерные (штрихованные) переменные

$$x' = \frac{\sqrt{mc}}{v_0}x, \ t' = \sqrt{\frac{c}{m}}\,t, \ v'(t') = \frac{1}{v_0}\sqrt{\frac{m}{c}}v\left(\sqrt{\frac{m}{c}}\,t'\right), \\ k' = \frac{v_0}{m\sqrt{mc}}k, \ a' = \frac{a}{v_0}, \ b' = b\frac{1}{v_0}\sqrt{\frac{m}{c}}. \tag{6}$$

После замены переменных (6) в формулах (1) – (5) и опускания штрихов получаем формулы того же вида, в которых $m = 1$, $c = 1$, $v_0 = 1$. Далее используются только безразмерные переменные.

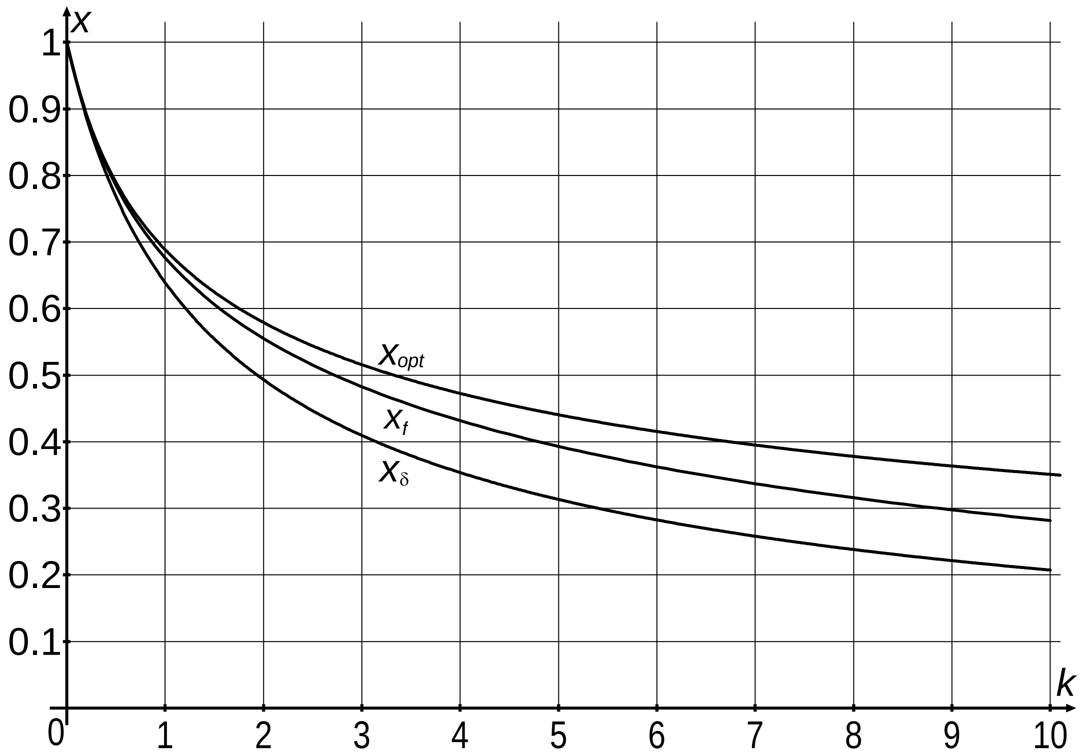

Рис. 1. Нижний график x_δ представляет смещение при дельта-возмущении, даваемым формулой (2) при $a = 1$. Средний график x_f представляет смещение $x(k)$, полученное для наихудшего возмущения $v_a(t)$. Верхний график представляет смещение $x_{opt} = J(k, b)$, полученное для наихудшего возмущения $v_b(t)$

Утверждение 1. Для возмущений класса V_a максимум по времени модуля отклонения осциллятора достигается в момент первого после начала движения обращения в нуль его скорости, т.е.

$$J_1 = \max_{t\in[0,\infty)} |x_v(t)| = x_v(t_*),\ \ \dot{x}_v(t_*) = 0,\ \ \dot{x}_v(t) > 0 \ \text{ при } \ t \in (0,\, t_*).$$

Утверждение 2. Для возмущений класса V_b и возмущения в виде дельта-функции $v(t) = \delta(t)$, максимум по времени модуля отклонения осциллятора достигается в момент первого после начала движения обнуления его скорости, т.е.

$$J_1 = \max_{t\in[0,\infty)} |x_v(t)| = x_v(t_*),\ \ \dot{x}_v(t_*) = 0,\ \ \dot{x}_v(t) > 0 \ \text{ при } \ t \in (0,\, t_*).$$

Доказательство утверждений 1, 2 основывается на свойстве диссипативности рассматриваемой системы в отсутствии ударов и равенстве механической энергии $E = x_*^2/2$ в момент наибольшего отклонения x_* при обращении скорости в ноль. Свойство диссипативности состоит в монотонном убывании механической энергии системы

$$E = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + x^2)$$

в отсутствии ударов.

2. Результаты расчета.

Используя утверждения 1, 2 были предложены алгоритмы расчета задач 1, 2. На языке Matlab были созданы две программы, максимизирующие наибольшее смещение для задач 1 и 2.

На рисунке 1 нижний график x_δ представляет смещение при дельта-возмущении, даваемым формулой (2) при $a = 1$. Средний график x_f представляет смещение $x(k)$, полученное для наихудшего возмущения $v_a(t)$. Верхний график представляет смещение $x_{opt} = J(k, b)$, полученное для наихудшего возмущения $v_b(t)$.

3. Заключение

Для осциллятора с квадратичным демпфированием поставлена задача о выборе параметра однонаправленной внешней силы, обеспечивающего наибольшее смещение осциллятора от положения равновесия. Выбор параметра осуществляется для двух классов внешних воздействий. Первый класс возмущений состоит из двух последовательных однонаправленных мгновенных ударов заданной суммарной интенсивности. Второй класс возмущений состоит из постоянных возмущений ограниченной длительности. Для обоих классов возмущений доказано, что при заданных параметрах внешней силы первый локальный максимум смещения представляет собой максимальное смещение. Численно получены оптимальные значения параметра внешней силы для обоих классов возмущений, обеспечивающей наибольшее смещение и зависящей от параметров осциллятора. По величине наибольшего смещения осциллятора от положения равновесия проведено сравнение указанных возмущений между собой, а также с возмущением, состоящим из одного мгновенного удара.

Работа выполнена по теме государственного задания (№ госрегистрации 123021700055-6).

Список литературы

1. Sevin E., Pilkey W. Optimum Shock and Vibration Isolation. Washington, DC: Shock and Vibration Information Analysis Center, 1971. 162 p.
2. Коловский М.З. Автоматическое управление виброзащитными системами. М.: Наука, 1976, 320 с.
3. Болотник Н.Н. Оптимизация амортизационных систем. М.: Наука, 1983, 256 с.
4. Balandin D.V., Bolotnik N.N., Pilkey W.D. Optimal Protection from Impact, Shock, and Vibration. Amsterdam: Gordon and Breach Science Publishers, 2001. 436 p.
5. Pilkey W.D., Balandin D.V., Bolotnik N.N., Crandal J.R., Purtsezov S.V. Injury Biomechanics and Control: Optimal Protection from Impact. Hoboken, NJ: Wiley and Sons, 2010. 286 p.
6. Ledezma-Ramirez D.F., Tapia-Gonzalez P.E., Ferguson N., Brennan M., Tang B. Recent Advances in Shock Vibration Isolation: An Overview and Future Possibilities // Applied Mechanics Reviews. 2019. Vol. 71, No. 6.