УДК 517.935.4

КВАДРАТИЧНАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ СИСТЕМ С ПЕРЕКЛЮЧЕНИЯМИ МЕЖДУ ТРЕМЯ ЛИНЕЙНЫМИ ДИСКРЕТНЫМИ ПОДСИСТЕМАМИ

В.А. Каменецкий

Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН

Россия, 117997, Москва, Профсоюзная ул., 65

E-mail: vlakam@ipu.ru

Ключевые слова: дискретные системы с переключениями, устойчивость, функции Ляпунова, матричные неравенства.

Аннотация: Для систем с переключениями между тремя линейными дискретными подсистемами предлагается новый частотный критерий существования квадратичной функции Ляпунова, обеспечивающей устойчивость системы при произвольных переключениях.

1. Введение

Системы с дискретным временем являются предметом многочисленных исследований [1–7] (см. также библиографию, приведенную в этих публикциях). Здесь рассматривается задача квадратичной устойчивости связных [3] систем с переключениями между тремя линейными дискретными подсистемами при любых законах переключения. Система квадратично устойчива, если ее устойчивость можно установить с помощью функции Ляпунова из класса квадратичных форм или квадратичной функции Ляпунова (КФЛ). В случае связной системы с переключениями между двумя подсистемами эта задача эквивалентна [3] задаче абсолютной устойчивости дискретной системы с одной нелинейностью и критерием квадратичной устойчивости такой системы является известный критерий Цыпкина [8]. В этом случае связность означает, что разность матриц, определяющих переключаемые подсистемы, имеет ранг единица.

Для связных дискретных систем с переключениями между тремя линейными стационарными подсистемами в [3] получен частотный критерий существования КФЛ. Недостатком этого критерия является избыточная громоздкость при его получении и избыточная громоздкость конечного результата. Эта громоздкость объясняется следующим. В соответствии с методом функций Ляпунова квадратичная устойчивость системы с переключениями следует из существования общей КФЛ. В рассматриваемом случае существование общей КФЛ определяется разрешимостью системы из трех линейных матричных неравенств (ЛМН) Ляпунова для дискретных систем. Эта система ЛМН является связной [3] и можно получить одно эквивалентное ей результирующее матричное неравенство (МН). Однако, (а) это МН не является ЛМН и (б) частотные условия его разрешимости не удается получить на основании обобщенной леммы Калмана-Сеге-Попова [9, 10], как это было сделано в [3] в случае критерия Цыпкина. Чтобы преодолеть неудобство (б) в [3] от системы ЛМН Ляпунова для дискретных систем делается переход к эквивалентной системе ЛМН Ляпунова для непрерывных систем. Условия разрешимости результирующего МН для этой системы ЛМН могут быть установлены в форме частотного критерия на основании частотной теоремы [11, с. 54](KYP лемма). Условия этого критерия выражаются через элементы «передаточной матрицы» для полученной в результате преобразования непрерывной системы. Далее, достаточно трудоемко, эти элементы выражаются через элементы «передаточной матрицы» исходной дискретной системы.

В настоящей работе для исходной системы из трех ЛМН Ляпуновского типа для дискретных систем удается получить эквивалентное ей результирующее МН, которое является ЛМН. Для этого используется новый результат (теорема 2 из [12]). Показывается, что разрешимость полученного ЛМН можно установить с помощью обобщенной леммы Калмана-Сеге-Попова в виде частотного критерия. В результате получен новый частотный критерий квадратичной устойчивости для рассматриваемых систем.

2. Постановка задачи

В статье исследуется линейная дискретная система с переключениями

$$x(t+1) = A(t)x(t), \quad A(t) \in \overline{A} = \{A_1, A_2, A_3\}, \tag{1}$$

где $A_s \in \mathrm{R}^{n\times n}$ и $A(t) : \mathrm{Z}_+ \longrightarrow \overline{A}$ – отображение из множества Z_+ неотрицательных целых чисел в $\overline{A}$. Матрицы A_s предполагаются устойчивыми, т.е. $r(A_s) = \max\limits_{\nu} |\lambda_\nu(A_s)| < 1$ при $s = \overline{1,3}$. Для исследования устойчивости системы с переключениями (1) будут использоваться КФЛ следующего вида:

$$v(x) = x^\top Lx, \quad L = L^\top = \|l_{ij}\|_{i,j=1}^n. \tag{2}$$

Известно [3], что существование КФЛ (2) определяется разрешимостью системы ЛМН

$$I_s = A_s^\top LA_s - L < 0, \quad s = \overline{1,3}. \tag{3}$$

В случае связной системы (1) матрицы $\{A_1, A_2, A_3\}$ можно представить в виде

$$A_1 = A, \quad A_2 = A + b_1c_1^\top, \quad A_3 = A + b_2c_2^\top, \quad b_i, c_i \in \mathbb{R}^n. \tag{4}$$

В этом случае система (3) представима в виде

$$\begin{aligned} &I_1 = A^\top LA - L < 0,\\ &I_2 = (A + b_1c_1^\top)^\top L(A + b_1c_1^\top) - L < 0,\\ &I_3 = (A + b_2c_2^\top)^\top L(A + b_2c_2^\top) - L < 0. \end{aligned} \tag{5}$$

Задачей является получение частотного критерия разрешимости системы (5).

3. Системы с переключениями между тремя линейными дискретными подсистемами

Для исследования разрешимости системы (5) используем теорему 2 из [12].

Теорема 1. *Пусть в системе*

$$I_1 < 0, \quad I_2 = I_1 + Q_1 < 0, \quad I_3 = I_1 + Q_2 < 0. \tag{6}$$

неравенства являются ЛМН относительно неизвестной переменной ν, *т.е.* $I_s = I_s(\nu)$, $s = \overline{1,3}$, *и* $Q_j(\nu) = p_j(\nu)q_j^\top + q_j p_j^\top(\nu)$, *где* $p_j = p_j(\nu)$ *зависит от* ν *линейно, а* q_j *от* ν *не зависит,* $j = 1, 2$. *Тогда система* (6) *эквивалентна одному МН*

$$\widehat{\widehat{I}} = \begin{pmatrix} I_1(\nu) & p_1(\nu) + \dfrac{\tau_1}{2}q_1 & p_2(\nu) - p_1(\nu) + \dfrac{\tau_2}{2}q_2 - \dfrac{\tau_1}{2}q_1 \\ (\bullet)^\top & -\tau_1 & (\tau_1 - \tau_2 + \tau_3)/2 \\ (\bullet)^\top & \bullet & -\tau_3 \end{pmatrix} < 0, \tag{7}$$

которое является ЛМН относительно $(\nu, \tau_1, \tau_2, \tau_3)$.

Применяя теорему 1 к системе (5), получим, что разрешимость системы (5) эквивалентна разрешимости одного МН относительно элементов матрицы L и трех дополнительных параметров τ_1, τ_2, τ_3. Возможность применения теоремы 1 к системе (5) и вид получаемого в результате МН определяется из следующих соотношений. Матрице $I_1(\nu)$ соотетствует матрица $A^\top LA - L$ из системы (5), т.е. $I_1(\nu) = I_1(L) = A^\top LA - L$ (роль параметра v выполняет матрица L). Разница матриц $I_2 - I_1$ из (5) представима в виде $p_1q_1^\top + q_1p_1^\top$

$$\begin{aligned} I_2 - I_1 = A_2^\top LA_2 - A_1^\top LA_1 = (A + b_1c_1^\top)^\top L(A + b_1c_1^\top) - A^\top LA = \\ =(A^\top L + c_1b_1^\top L)(A + b_1c_1^\top) - A^\top LA = A^\top Lb_1c_1^\top + c_1b_1^\top LA + c_1b_1^\top Lb_1c_1^\top. \end{aligned} \tag{8}$$

Введем обозначения $p_1^0 = p_1^0(L) = A^\top Lb_1$ и $\delta_{11} = \delta_{11}(L) = b_1^\top Lb_1$, тогда

$$I_2 - I_1 = p_1^0c_1^\top + c_1(p_1^0)^\top + \delta_{11}c_1c_1^\top = p_1q_1^\top + q_1p_1^\top, \tag{9}$$

где $p_1 = p_1(L) = A^\top Lb_1 + (\delta_{11}(L)/2)c_1$, $q_1 = c_1$.

Аналогично, пусть $p_2^0 = p_2^0(L) = A^\top Lb_2$ и $\delta_{22} = \delta_{22}(L) = b_2^\top Lb_2$, тогда

$$I_3 - I_1 = p_2^0c_2^\top + c_2(p_2^0)^\top + \delta_{22}c_2c_2^\top = p_2q_2^\top + q_2p_2^\top, \tag{10}$$

где $p_2 = p_2(L) = A^\top Lb_2 + (\delta_{22}(L)/2)c_2$, $q_2 = c_2$.

Таким образом, в соответствии с теоремой 1 система (5) эквивалентна одному МН

$$\widehat{\widehat{I}} = \begin{pmatrix} A^\top LA - L & p_1(L) + \dfrac{\tau_1}{2}c_1 & p_2(L) - p_1(L) + \dfrac{\tau_2}{2}c_2 - \dfrac{\tau_1}{2}c_1 \\ (\bullet)^\top & -\tau_1 & (\tau_1 - \tau_2 + \tau_3)/2 \\ (\bullet)^\top & \bullet & -\tau_3 \end{pmatrix} < 0, \tag{11}$$

которое является ЛМН относительно $(L, \tau_1, \tau_2, \tau_3)$.

Возможность получения условий разрешимости ЛМН (11) на основании обобщенной леммы Калмана-Сеге-Попова [9, 10] следует из приводимой ниже без доказательства леммы 1.

Лемма 1. *ЛМН* (11) *эквивалентно ЛМН*

$$
\begin{pmatrix} A^\top LA - L & A^\top LB + C\tau/2 \\ B^\top LA + \tau C^\top/2 & B^\top LB - \Gamma \end{pmatrix} < 0, \tag{12}
$$

где

$$
B = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 - b_1 \end{pmatrix}, \;\; C = \begin{pmatrix} C_1 & C_2 \end{pmatrix} = \left(c_1 \;\; c_2 - \frac{\widehat{\tau}_1}{\widehat{\tau}_2} c_1 \right),
$$

$$
\tau = \begin{pmatrix} \widehat{\tau}_1 & 0 \\ 0 & \widehat{\tau}_2 \end{pmatrix}, \;\; \Gamma = \begin{pmatrix} \widehat{\tau}_1 & (-\widehat{\tau}_1 + \widehat{\tau}_2 - \widehat{\tau}_3)/2 \\ \bullet & \widehat{\tau}_3 \end{pmatrix},
$$

$\widehat{\tau}_i$ – *новые дополнительные параметры,* $i = \overline{1,3}$.

Необходимые и достаточные условия разрешимости ЛМН (12) определяются в форме частотного неравенства из обобщенной леммы Калмана-Сеге-Попова [9, 10]. Таким образом получаем следующий критерий квадратичной устойчивости системы (1).

Теорема 2. *Пусть матрица* A *устойчива* ($r(A) < 1$) *и существуют числа* $\widehat{\tau}_s > 0$, $s = \overline{1,3}$, *такие что* $\Gamma > 0$ *и частотное неравенство*

$$
\Gamma + \mathrm{Re}\,[\tau C^\top (A - \lambda E_n)^{-1} B] > 0 \tag{13}
$$

выполняется при всех $\lambda \in \mathbb{C}$, $|\lambda| = 1$, *где* E_n – *единичная* $(n \times n)$*-матрица* ($\mathrm{Re}\, W = (W + W^*)/2$, $W^* = \overline{W}^\top$ – *эрмитово сопряженная к* W). *Тогда связная система* (1) *имеет ОКФЛ* (*система* (5) *разрешима, система* (1) *устойчива*). *Если система* (5) *разрешима, то такой набор чисел* $\widehat{\tau}_s > 0$, $s = \overline{1,3}$, *существует.*

Проверка частотного неравенства (13) представляет собой сложную задачу. Еще более сложная задача – определение области квадратичной устойчивости системы (1) в пространстве параметров. Пример аналитического решения такой задачи приводится в [3], но там используется средства, отличные от проверки (13).

Численное решение проблемы квадратичной устойчивости системы (1) состоит в применении стандартных программных средств для проверки разрешимости системы ЛМН (5) размерности $3n$ относительно $n(n+1)/2$ неизвестных. Использование результата леммы 1 позволяет вместо проверки системы (5) проверять разрешимость одного ЛМН (12) размерности $n+2$ относительно $n(n+1)/2 + 3$ неизвестных. Такой переход позволяет существенно упростить задачу, особенно при больших n.

4. Заключение

Для связной системы с переключениями между тремя линейными дискретными подсистемами получен критерий существования КФЛ как в форме частотного условия, так и в форме условий разрешимости одного ЛМН.

Список литературы

1. Aleksandrov A., Mason O. Diagonal stability of a class of discrete-time positive switched systems with delay // IET Control Theory Appl. 2018. Vol. 12, No. 6. P. 812–818.

2. Проскурников А.В., Матвеев А.С. Критерии Цыпкина и Джури-Ли синхронизации и устойчивости дискретных многоагентных систем // Автоматика и телемеханика. 2018. № 6. С. 119–139.
3. Каменецкий В.А. Частотные условия устойчивости дискретных систем с переключениями // Автоматика и телемеханика. 2018. № 8. С. 3–26.
4. Маликов А.И. Оценивание состояния и стабилизация дискретных систем с неопределенными нелинейностями и возмущениями // Автоматика и телемеханика. 2019. № 11. С. 59–82.
5. Александров А.Ю., Семенов А.Д., Фрадков А.Л. Запаздывания и переключения не мешают размещать агентов на отрезке: дискретное время // Автоматика и телемеханика. 2020. № 4. С. 79–93.
6. Пакшин П.В., Емельянова Ю.П. Управление с итеративным обучением дискретными стохастическими системами с переключениями // Автоматика и телемеханика. 2020. № 11. С. 93–111.
7. Каменецкий В.А. Дискретные попарно связные системы с переключениями и системы Лурье, критерий Цыпкина для систем с двумя нелинейностями // Автоматика и телемеханика. 2022. № 9. С. 55–80.
8. Цыпкин Я.З. Об устойчивости в целом нелинейных импульсных автоматических систем // Докл. АН СССР. 1962. Т. 145, № 1. С. 52–65.
9. Якубович В.А. Абсолютная устойчивость импульсных систем с несколькими нелинейными или линейными нестационарными блоками. I, II // Автоматика и телемеханика. 1967. № 9. С. 59–72; 1968. № 2. С. 81–101.
10. Шепелявый А.И. Абсолютная неустойчивость нелинейных амплитудно-импульсных систем управления. Частотные критерии // Автоматика и телемеханика. 1972. № 6. 49–56.
11. Гелиг А.Х., Леонов Г.А., Якубович В.А. Устойчивось нелинейных систем с неединственным состоянием равновесия. М.: Наука, 1978.
12. Каменецкий В.А. Матричные неравенства в теории устойчивости: новые результаты на основе теоремы о свертывании // Автоматика и телемеханика. 2023. № 2. С. 103–121.