

СТАБИЛИЗАЦИЯ ВЕРХНЕГО ПОЛОЖЕНИЯ ПЕРЕВЕРНУТОГО МАЯТНИКА НА КОЛЕСЕ С ПОМОЩЬЮ СИГМОИДАЛЬНЫХ ЗАКОНОВ УПРАВЛЕНИЯ

М.Д. Горбачев

*Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН
Россия, 117997, Москва, Профсоюзная ул., 65
e-mail: gorbachev.md@phystech.edu*

Ключевые слова. Асимптотическая устойчивость, перевернутый маятник, маятник на колесе, сигмоидальный закон управления.

Аннотация. В данной работе предложен метод стабилизации верхнего положения перевернутого маятника на колесе с помощью сигмоидальных управлений. Сложность этой задачи заключается в том, что с помощью одного управляющего воздействия необходимо стабилизировать четыре фазовые переменные – угол вращения колеса, угол отклонения маятника от вертикали и их угловые скорости. Описаны эвристики, позволяющие стабилизировать верхнее положение равновесия и получить асимптотически устойчивую по состоянию замкнутую систему. Синтезированы сигмоидальные законы управления в виде функций арктангенса и гиперболического тангенса. С помощью математического моделирования в пакете *SciLab* получены фазовые портреты, которые отображают асимптотическую устойчивость системы, подтверждая полученные физические выкладки. Приведена сравнительная характеристика двух полученных законов управления с выявлением их преимуществ и недостатков.

1. Введение

Одним из классических примеров применения теории управления является задача стабилизации перевернутого маятника на колесе. Данный маятник является примером неустойчивой системы, в которой малейшее изменение начальных параметров может привести к потере устойчивости и выходу конструкции из состояния равновесия. Более того, система маятника на колесе является модельной для иллюстрации многих методов стабилизации нелинейных систем. В настоящее время опубликовано большое число научных статей [1-7] по теории управления, описывающих стабилизацию верхнего положения перевернутого маятника на колесе.

Однако, существуют методы стабилизации такой системы. Одним из таких методов является использование линеаризации обратной связью по выходу системы [4]. При таком подходе, используется сенсор, который измеряет угол наклона маятника и передает эту информацию контроллеру. Контроллер обрабатывает эту информацию и сигнализирует мотору, который, в свою очередь, крутит колесо в нужном направлении. В результате, колесо стабилизирует перевернутый маятник и возвращает его в начальное положение. Тем не менее, данный метод не приводит нулевую динамику системы к асимптотической устойчивости. В связи с этим, в настоящей работе будут

представлены методы, позволяющие достичь асимптотической устойчивости перевернутого маятника на колесе.

Одним из таких методов является метод скользящих режимов [8-10]. Тем не менее, данный метод может негативно влиять на работоспособность системы, например к выходу из строя релейных переключателей из-за большой частоты переключения, поэтому в настоящей работе рассмотрены гладкие аналоги разрывного управления в виде сигмоидальных функций, которые также приводят систему к асимптотической устойчивости.

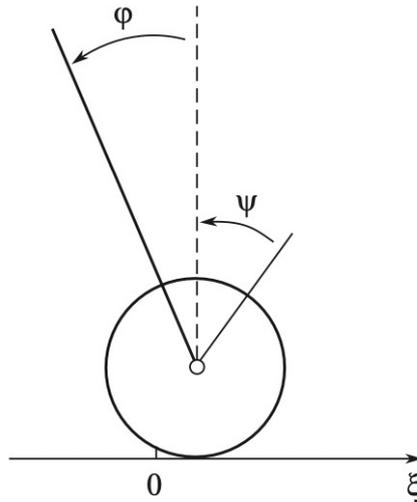


Рис. 1. Схема маятника на колесе.

2 Описание модели перевернутого маятника на колесе

В ряде работ [1, 2] рассмотрено управление, стабилизирующее вертикальное положение маятника в линеаризованной системе. Также существуют работы [3], в которых рассмотрен метод линеаризации обратной связи по выходу системы, где в качестве выхода выбран угол отклонения маятника. В работе [4] рассмотрено управление, позволяющее достичь стабилизации по состоянию системы с помощью линеаризации обратной связи, однако устойчивость получена не асимптотическая. В данных книгах [8-10] рассмотрено применение метода скользящих режимов для стабилизации обыкновенного перевернутого маятника и предложены гладкие аналоги управлений в виде *sigmoid*. В настоящей работе будет рассмотрено применение гладких аналогов разрывного управления в виде сигмоидальных функций для перевернутого маятника на колесе.

Перейдем к описанию математической модели системы. Начало оси ξ на рис. 1 обозначено через 0. Переменная ξ используется для обозначения положения центра колеса. Необходимо стабилизировать верхнее положение равновесия маятника и одновременно нулевое значение переменной ξ . Обозначим через φ угловое отклонение маятника от вертикальной оси, ортогональной оси ξ . Через ψ обозначим угол между вертикалью и некоторым выделенным радиусом колеса, причем нулевому значению ψ отвечает нулевое значение ξ . Положительное значение углов отсчитывается против часовой стрелки. Таким образом, на рис. 1 угол φ положителен, а угол ψ отрицателен, что соответствует положительному значению ξ . Пусть m — это масса, сосредоточенная на конце маятника длины l , M — масса колеса, J — момент инерции колеса и r — его радиус. Пусть

$$(1) \quad M_1 = \frac{J}{r^2}, \quad \beta = \frac{M+M_1}{m}.$$

Далее для угловой переменной ψ и линейного отклонения ξ имеем следующее выражение:

$$(2) \quad \psi = -\frac{\xi}{r}, \quad \theta = -\frac{\xi}{l} = \psi \frac{r}{l}.$$

Таким образом, можно выписать уравнения движения:

$$(3) \quad \begin{cases} \varphi'' = f_1(x) + h_1(x)u \\ \theta'' = f_2(x) + h_2(x)u \end{cases}$$

$$(4) \quad f_1(x) = \frac{\sin \varphi}{d} (-\varphi'^2 \cos \varphi + 1 + \beta),$$

$$(5) \quad f_2(x) = \frac{\sin \varphi}{d} (\varphi'^2 - \cos \varphi),$$

$$(6) \quad h_1(x) = \frac{1}{d} (\cos \varphi + 1 + \beta),$$

$$(7) \quad h_2(x) = \frac{1}{d} (-\cos \varphi - 1).$$

В качестве выхода для системы выберем сумму углов φ и θ

$$(8) \quad y = \varphi + \theta,$$

и синтезируем управление системой, гарантирующее асимптотическую устойчивость по этому выходу.

Получим выражение для закона управления:

$$(9) \quad u^*(x) = -\frac{d\lambda^2(\varphi+\theta)+2d\lambda(\varphi'+\theta')+\sin \varphi[(1-\cos \varphi)(\varphi'^2+1)+\beta]}{\beta}.$$

Вывод данного закона управления для перевернутого маятника на колесе описан в работе [4].

Очевидно, что стабилизация по выходу не решает задачу стабилизации по состоянию системы. Этот факт плавно подводит нас к основной части настоящей работы.

3. Синтез гладкого аналога разрывного управления в виде $\arctan(\tilde{S}x)$

При синтезировании управления будем исходить из его физического смысла – в первую очередь, данное управление должно быть ограниченным, ведь ресурсы любого двигателя или генератора являются конечными. С помощью метода линеаризации обратной связью по выходу было получено управление u^* из (9). Введем в рассмотрение следующее управление:

$$(10) \quad \tilde{u} = \frac{2}{\pi} \arctan(\tilde{S}u^*),$$

где коэффициент $\tilde{S} > 1$ является коэффициентом усиления.

С помощью пакета *SciLab* смоделируем фазовые портреты траекторий следующих уравнений движения:

$$(11) \quad \begin{cases} \varphi'' = f_1(x) + h_1(x) \frac{2}{\pi} \arctan(\tilde{S}u^*) \\ \theta'' = f_2(x) + h_2(x) \frac{2}{\pi} \arctan(\tilde{S}u^*) \end{cases}$$

Данная система является замкнутой построенным законом управления.

Для определенности системы зададим начальные условия таким образом, чтобы они были физически реализуемы. Коэффициент β будем считать равным 0.5, показатель $\lambda = 10$, а начальное значение четырехмерного вектора углов и угловых скоростей системы $(\varphi, \varphi', \theta, \theta')^T$ в нулевой момент времени примем за $(-5, 0, 4, 0)^T$. Моделирование фазовых портретов системы производилось при помощи численного метода интегрирования.

На рис. 2 и рис. 3 можно наблюдать фазовые портреты системы (11). Как видно из рисунков, фазовые портреты стягиваются к нулю, что свидетельствует о наличии асимптотической устойчивости у системы. На рис. 4 и рис. 5 представлены графики зависимости выхода системы от времени. Как видно, выход и производная выхода стремятся к нулю, что также свидетельствует об устойчивости системы.

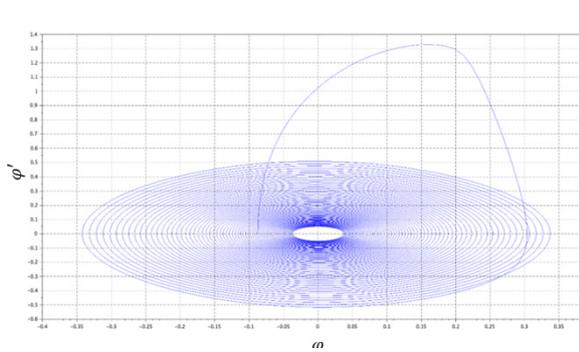


Рис. 2. Фазовый портрет в осях (φ, φ') .

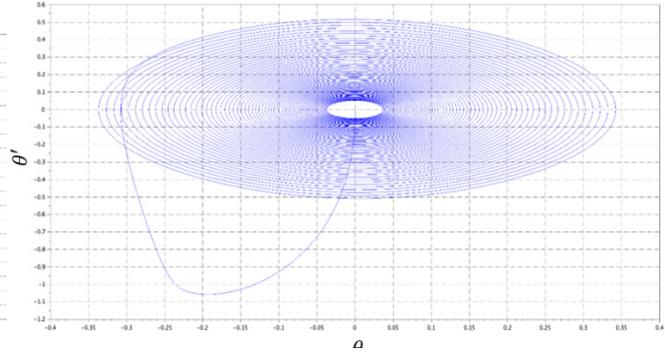


Рис. 3. Фазовый портрет в осях (θ, θ') .

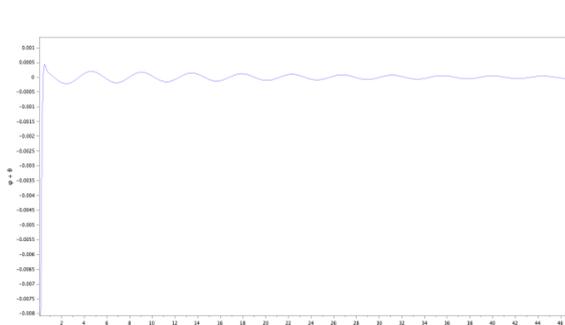


Рис. 4. График зависимости $\varphi + \theta$ от t .

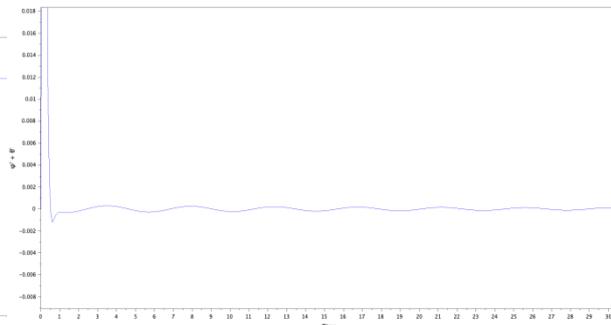


Рис. 5. График зависимости $\varphi' + \theta'$ от t .

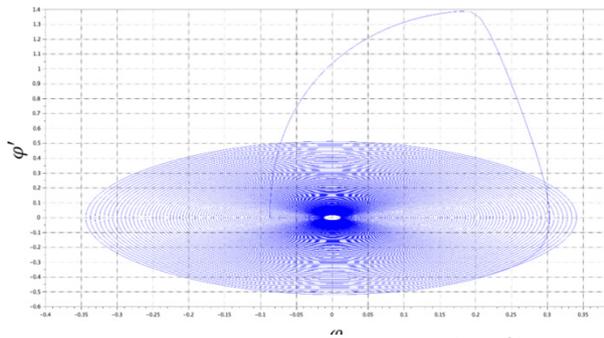
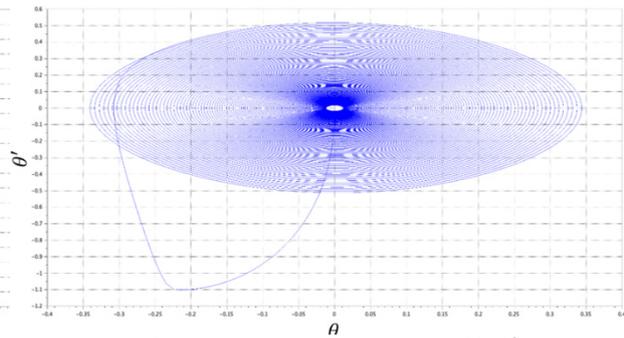
4. Моделирование фазовых портретов при гладком аналоге типа $\tanh(\tilde{S}x)$

В предыдущем разделе был рассмотрен один из множества сигмоидальных аналогов разрывной функции управления, в качестве сравнительного примера, можно рассмотреть функцию гиперболического тангенса. Ввести ее в рассмотрение стоит в связи с тем, что при одинаковых коэффициентах усиления $\tanh(\tilde{S}x)$ имеет больший коэффициент наклона в нуле, чем нормированный на единицу $\frac{2}{\pi} \arctan(\tilde{S}x)$, что может улучшить скорость сходимости.

Ниже приведем уравнения движения для управления в виде гиперболического тангенса:

$$(12) \quad \begin{cases} \varphi'' = f_1(x) + h_1(x) \frac{2}{\pi} \tanh(\tilde{S}u^*) \\ \theta'' = f_2(x) + h_2(x) \frac{2}{\pi} \tanh(\tilde{S}u^*) \end{cases}$$

Фазовые портреты для данной системы можно наблюдать на рис. 6, 7.

Рис. 7. Фазовый портрет в осях (φ, φ') .Рис. 8. Фазовый портрет в осях (θ, θ') .

Как видно из графиков, сходимость фазовых траекторий к нулю при управлении в виде гиперболического тангенса стала лучше при аналогичных временных интервалах численного интегрирования системы. Этот факт можно объяснить тем, что в окрестности нуля $\tanh(\tilde{S}x)$ имеет больший коэффициент наклона, чем у нормированного на единицу $\frac{2}{\pi} \arctan(\tilde{S}x)$, что обеспечивает лучшую аппроксимацию разрывного управления. Однако, в ходе моделирования было выявлено, что сам процесс численного интегрирования системы (12) занял большее время, чем у системы (11), это может быть связано с тем, что при численном подсчете компьютер использует разложения элементарных функций в ряд Тейлора, а, как известно, для функции $\arctan x$ намного проще получить ее разложение в ряд до сколь угодно большой степени, нежели для функции $\tanh x$. Таким образом, оба аналога разрывного управления в виде сигмоидальных функций имеют свои плюсы и минусы, в зависимости от желаемого результата, будь то сокращение времени реализации численного интегрирования или повышение скорости сходимости траекторий фазовых портретов к нулю, можно выбрать одну из представленных выше сигмоид.

5. Заключение

В настоящей работе был рассмотрен эвристический подход к решению задачи стабилизации перевернутого маятника на колесе в виде реализации на нем сигмоидальных управлений в виде $u = \arctan(\tilde{S}x)$ и $u = \tanh(\tilde{S}x)$, где коэффициент $\tilde{S} > 1$ является коэффициентом усиления. В результате численного моделирования были получены фазовые портреты системы перевернутого маятника на колесе, на которых можно наблюдать асимптотическую устойчивость системы. Также была проведена сравнительная характеристика двух сигмоидальных управлений с выявлением их преимуществ и недостатков. Результаты данной работы могут быть полезны для инженеров, проектирующих персональный вид транспорта в виде сегвеев, гироскутеров, различных типов моноколес, ведь все эти средства передвижения приобрели широкую известность и популярность во всем мире за последние годы. Более того, данная работа может найти свое применение в робототехнике, ведь в настоящее время существует большое количество колесных роботов со смещенным центром тяжести, которые необходимо стабилизировать по их состоянию.

Список литературы

1. Мартыненко Ю.Г., Формальский А.М. Управляемый маятник на подвижном основании // Механика твердого тела. 2013. № 1. С. 9-23.
2. Формальский А.М. Управление движением неустойчивых объектов. М.: Физматлит, 2012.

3. Халил Х.К. Нелинейные системы. М.-Ижевск: ИКИ-РХД, 2009.
4. Rapoport L.B., Generalov A.A. Control of an Inverted Pendulum on a Wheel // Automation and remote control. 2022. Vol. 83, No. 8. P. 1151-1171.
5. Utkin V.I., Guldner J., Shi J. Sliding mode control in electro-mechanical systems. CRC Press. 2009.
6. Поляк Б.Т., Хлебников М.В., Рапопорт Л.Б. Математическая теория автоматического управления. М.: ЛЕНАНД, 2019. 500 с.
7. Масина О.Н., Петров А.А., Дружинина О.В., Рапопорт Л.Б. Моделирование управляемых систем с применением методов стабилизации и алгоритмов поиска оптимальных траекторий. Учебное пособие. Елец: Изд-во Елецкого государственного университета им. И.А. Бунина, 2021. 117 с.
8. Уткин В.И. Скользящие режимы и их применение в системах с переменной структурой. М.: Наука, 1974. 272 с.
9. Емельянов С.В., Уткин В.И., Таран В.А., Костылева Н.Е., Шубладзе А.М., Езеров В.Б., Дубровский Е.Н. Теория систем с переменной структурой. М.: Наука, 1970. 592 с.
10. Уткин В.И. Скользящие режимы в задачах оптимизации и управления. М.: Наука, 1981. 368 с.