.
УДК 62-50

ПОСТРОЕНИЕ НАИХУДШЕГО ВОЗМУЩЕНИЯ ИЗ ДВУХ МГНОВЕННЫХ УДАРОВ ДЛЯ ОСЦИЛЛЯТОРА С КВАДРАТИЧНЫМ ДЕМПФИРОВАНИЕМ

В.А. Корнеев

Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН

Россия, 119526, Москва, пр-т Вернадского, д. 101, корп. 1

E-mail: korneev@ipmnet.ru

Ключевые слова: оптимальное управление, осциллятор с квадратичным демпфированием, наихудшие возмущения

Аннотация: На осциллятор с квадратичным демпфированием действует два последовательных однонаправленных мгновенных удара заданной суммарной интенсивности. В начальный момент времени осциллятор покоится в положении равновесия. В рассматриваемом классе возмущений требуется найти параметры этих ударов, обеспечивающие наибольшее значение максимума модуля смещения (по времени) тела осциллятора от положения равновесия.

1. Механическая система и постановка задачи.

Задача о наихудшем возмущении в различных классах для объектов, размещенных на подвижном основании, возникает при рассмотрении задач об оптимальной гарантированной противоударной защите объектов, размещенных на подвижном основании, подверженном ударам. Достаточно полно проблема противоударной изоляции изложена в работах [1–6]. Наиболее известными пассивными противоударными изоляторами являются простые изоляторы с линейной пружиной и демпфером с линейной или квадратичной характеристикой. В данной работе рассмотрим пассивный изолятор с квадратичным демпфированием, для которого движение изолируемого объекта относительно основания описывается уравнением

(1) $$m\ddot{x} + k|\dot{x}|\,\dot{x} + cx = v(t), \;\; v = -mw(t).$$

Здесь m – масса защищаемого объекта, w – ускорение объекта относительно неподвижной системы координат, x – координата объекта относительно основания, k – коэффициент жесткости, c – коэффициент демпфирования. Величину mw рассматриваем как внешнее возмущение.

Введем однопараметрический класс V_a возмущений, содержащих два мгновенных удара, направленных в одну сторону и имеющих суммарный импульс v_0:

$$(2)\qquad \begin{aligned} V_a = \{ & v_a(t): \ \ v_a(t) = a\delta(t) + (v_0 - a)\delta(t - t_a), \\ & 0 \leqslant a \leqslant v_0, \ \ 0 \leqslant t_a \leqslant t_a^* \} \end{aligned}$$

Здесь t_a^* первый момент обращения скорости в 0 после действия возмущения $v(t) = a\delta(t)$.

Задача 1. Для механической колебательной системы, задаваемой дифференциальным уравнением (1) с нулевыми начальными условиями

$$(3)\qquad x(0) = 0, \ \ \dot{x}(0) = 0,$$

найти функцию $v(t)$, которая принадлежит классу V_a и максимизирует функционал

$$J(v) = \max_{t \in [0,\,\infty)} |x_a(t)|.$$

Здесь $x_a(t)$ – решение уравнения (1) при начальных условиях (3) и заданном возмущении $v_a(t)$.

Для уменьшения числа определяющих параметров введем безразмерные (штрихованные) переменные

$$(4)\qquad \begin{aligned} & x' = \frac{\sqrt{mc}}{v_0} x, \ \ t' = \sqrt{\frac{c}{m}}\, t, \ \ v'(t') = \frac{1}{v_0}\sqrt{\frac{m}{c}} v\left(\sqrt{\frac{m}{c}}\, t'\right), \\ & k' = \frac{v_0}{m\sqrt{mc}} k, \ \ a' = \frac{a}{v_0}. \end{aligned}$$

После замены переменных (4) в формулах (1) – (3) и опускания штрихов получаем формулы того же вида, в которых $m = 1$, $c = 1$, $v_0 = 1$. Далее используются только безразмерные переменные.

Утверждение 1. Для возмущений класса V_a максимум по времени модуля отклонения осциллятора достигается в момент первого после начала движения обращения в нуль его скорости, т.е.

$$J_1 = \max_{t \in [0,\,\infty)} |x_v(t)| = x_v(t_*), \ \ \dot{x}_v(t_*) = 0,$$
$$\dot{x}_v(t) > 0 \ \text{ при } \ t \in (0,\, t_*).$$

Доказательство утверждения 1 основывается на свойстве диссипативности рассматриваемой системы в отсутствии ударов и равенстве механической энергии $E = x_*^2/2$ в момент наибольшего отклонения x_* при обращении скорости в ноль. Свойство диссипативности состоит в монотонном убывании механической энергии системы

$$E = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + x^2)$$

в отсутствии ударов. Из утверждения 1 следует, что для решения поставленной задачи о наихудшем возмущении достаточно ограничиться решением уравнения (1) с начальными условиями (3) при $v_a(t)$, заданном выражением (2), на интервале времени $[0,\, t_*]$, где $t_* > 0$ – момент первого после начала движения обращения в нуль скорости осциллятора. На этом интервале скорость $\dot{x}$ неотрицательна, и уравнение (1) упрощается, принимая в безразмерных переменных вид $\ddot{x} + k\,\dot{x}^2 + x = v(t)$.

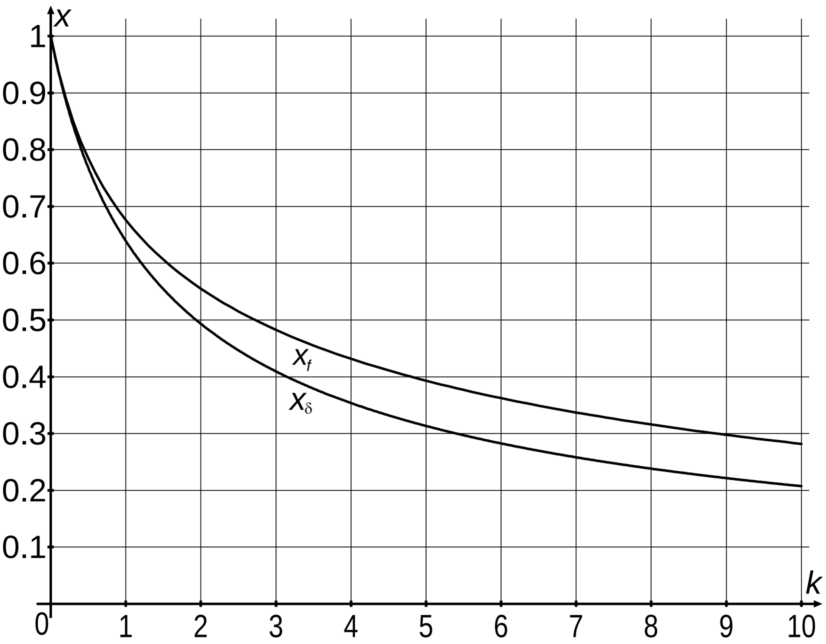

Рис. 1. Нижний график x_δ описывает смещение при дельта-возмущении, даваемое возмущением v_a при $a = 1$. Верхний график x_f описывает смещение $x(k)$

2. Результаты расчета.

Благодаря утверждению 1 задача 1 была сведена к задаче максимизации функции двух переменных $x_f(a, x_0)$:

$$x_f(a, x_0) = \frac{1}{2k}\Big(1 + W_+\Big(\Big[2k^2u_a^2 + 2kx_0 - 1\Big]e^{2kx_0-1}\Big),$$

$$u_a = \sqrt{\Big(a^2 - \frac{1}{2k^2}\Big)\, e^{-2kx_0} - \frac{1}{2k^2}(2kx_0 - 1) + 1} - a$$

по переменным a, x_0 в области

$$G_k = \{a, x_0 : 0 \leqslant a \leqslant 1,\ 0 \leqslant x_0 \leqslant x_1(a)\},$$

$$x_1(a) = \frac{1 + W_+((2k^2\, a^2 - 1)e^{-1})}{2k}.$$

Здесь индекс k указывает на зависимость области от параметра k, W_+ – верхняя ветвь функции Ламберта, x_0 – значение координаты x, при котором происходит второй удар, $x_f(a, x_0)$ – наибольшее смещение при заданных величинах a, x_0 и k. На языке Matlab была создана программа, максимизирующая наибольшее смещение $x_f(a, x_0)$ по величинам a, x_0 при заданном k и получены зависимости $a(k), x_0(k), x_f(k)$, описывающие значения параметров удара и смещение при наихудшем возмущении. На рисунке (1) нижний график x_δ описывает смещение при дельта-возмущении, даваемое возмущением v_a при $a = 1$. Верхний график x_f описывает смещение $x(k)$ полученное для наихудшего возмущения $v_a(t)$ из (2).

Работа выполнена по теме государственного задания (№ госрегистрации 123021700055-6).

Список литературы

1. Sevin E., Pilkey W. Optimum Shock and Vibration Isolation. Washington, DC: Shock and Vibration Information Analysis Center, 1971. 162 p.
2. Коловский М.З. Автоматическое управление виброзащитными системами. М.: Наука, 1976, 320 с.
3. Болотник Н.Н. Оптимизация амортизационных систем. М.: Наука, 1983, 256 с.
4. Balandin D.V., Bolotnik N.N., Pilkey W.D. Optimal Protection from Impact, Shock, and Vibration. Amsterdam: Gordon and Breach Science Publishers, 2001. 436 p.
5. Pilkey W.D., Balandin D.V., Bolotnik N.N., Crandal J.R., Purtsezov S.V. Injury Biomechanics and Control: Optimal Protection from Impact. Hoboken, NJ: Wiley and Sons, 2010. 286 p.
6. Ledezma-Ramirez D.F., Tapia-Gonzalez P.E., Ferguson N., Brennan M., Tang B. Recent Advances in Shock Vibration Isolation: An Overview and Future Possibilities // Applied Mechanics Reviews. 2019. Vol. 71, No. 6. https://doi.org/10.1115/1.4044190