УДК 531.36

О РАЗМЕРНОСТЯХ ЗАДАЧ УПРАВЛЕНИЯ ПРИ СТАБИЛИЗАЦИИ НЕСВОБОДНЫХ СИСТЕМ

А.Я. Красинский

Московский авиационный институт

Россия, 125993, Москва, Волоколамское шоссе, 4

E-mail: krasinsk@mail.ru

Ключевые слова: геометрические связи, множители связей, размерность математической модели, устойчивость, стабилизация, управляемая подсистема.

Аннотация:
Описание управляемой динамики несвободных систем уравнениями с множителями связей приводит к моделям размерностей, больших числа степеней свободы. Исследование настолько усложняется, что изучение поведения конкретного устройства зачастую ограничивается лишь компьютерной симуляцией. В данной работе изложенные строго обоснованные методы упрощения исследования за счет исключения из рассмотрения зависимых скоростей и множителей связей. Свободные от множителей связей векторно-матричные уравнения в избыточных координатах сокращают размерность математической модели на удвоенное количество связей. В общей проблеме стабилизации заданной конфигурации предлагаемая форма уравнений с явным видом структуры нелинейных членов, обеспечив эффективное применение теории управления и нелинейной теории устойчивости, дополнительно сократила размерность задачи управления: стабилизирующее воздействие определяется решением линейно-квадратичной задачи для линейной управляемой подсистемы, включащей только независимые координаты и их скорости. При наличии циклических координат переход в векторно-матричных уравнениях к переменным Рауса дает дальнейшее сокращение размерности управляемой подсистемы на число (неуправляемых) циклических импульсов. Устойчивость в полных нелинейных системах, замкнутых найденными из подсистем управлениями, строго доказана.

1. Введение

Параллельные кинематические цепи в исполнительных механизмах манипуляторов с параллельной кинематикой обеспечивают повышенную жесткость, меньшую массу, высокие быстродействие и точность, но возникаюшие при этом геометрические связи усложняют моделирование динамики. Для несвободных систем существует широкий выбор форм уравнений и типов переменных, в наибольшей степени отвечающих природе рассматриваемой задачи, однако до сих пор при исследовании конкретных технических устройств с геометрическими связями используются далеко не самые эффективные из них. Предлагаемое приложение нелинейной теории устойчивости, математической теории управления, аналитической механики за счет рационального выбора формы уравнений и типа переменных, значительно сокращает размерности управляемых подсистем и эффективно упрощает моделирование управляемой динамики систем с геометрическими связями.

2. Методы моделирования динамики несвободных систем с геометрическими связями. Сравнение сложности их применения

Рассмотрим общий случай несвободной системы, конфигурация которой определяется параметрами $q' = (q_1, q_2, \cdots q_{n+m})$, $m \leqslant n$, находящейся под действием потенциальных сил с энергией $\Pi(q)$ и непотенциальных сил $\tilde{Q}_\gamma(q, \dot{q})$, в число которых могут входить и управления. Допустим, что кинетическая энергия системы имеет самый общий вид (суммирование по повторяющимся индексам)

$$T(q, \dot{q}) = 1/2 a_{\gamma\nu}(q)\dot{q}_\gamma \dot{q}_\nu + a_\gamma(q)\dot{q}_\gamma + T_0(q); \quad \gamma, \nu = \overline{1, n+m}; \tag{1}$$

причем на систему наложено m независимых геометрических связей

$$F_\sigma(q_1, q_2, \cdots q_{n+m}); \quad \sigma = \overline{1, m}; \quad \frac{\partial(F_1, \cdots F_m)}{\partial(q_{n+1}, \cdots q_n)} \neq 0; \tag{2}$$

2.1. Уравнения с множителями связей

Для удобства введем векторы (штрих означает транспонирование):

$$q' = (q_1, \cdots, q_{n+m}); \quad r' = (q_1, \cdots, q_n); \quad s' = (q_{n+1}, \cdots, q_{n+m});$$

$$F'(q) = (F_1(q), \cdots, F_m); \quad \tilde{Q}'(q, \dot{q}) = (\tilde{Q}_1, \cdots, \tilde{Q}_{n+m}); \lambda' = (\lambda_1, \cdots, \lambda_m)$$
$$\tilde{Q}'_r(q, \dot{q}) = (\tilde{Q}_1, \cdots, \tilde{Q}_n); \quad \tilde{Q}'_s(q, \dot{q}) = (\tilde{Q}_{n+1}, \cdots, \tilde{Q}_{n+m});$$

В силу связей (2) вариации координат связаны условиями

$$\frac{\partial F(q)}{\partial r}\delta r + \frac{\partial F(q)}{\partial s}\delta s = 0; \quad \delta s = -B(q)\delta r; \quad B(q) = -\left(\frac{\partial F}{\partial s}\right)^{-1}\left(\frac{\partial F}{\partial r}\right); \tag{3}$$

на основе которых из принципа Даламбера-Лагранжа получаются уравнения

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = \tilde{Q} + \left(\frac{\partial F(q)}{\partial q}\right)'\lambda; \quad L(q, \dot{q}) = T(q, \dot{q}) - \Pi(q); \tag{4}$$

Полученная математическая модель в переменных $q, \dot{q}, \lambda$ включает $n + m$ дифференциальных уравнений второго порядка (4), причем для определения множителей следует добавить уравнения связей (2). В нормальной форме общая размерность $2(n+m)+m$ существенно превышает число степеней свободы системы.

2.2. Методы исключения множителей связей

Сокращением размерности модели можно упростить исследование динамики конкретных систем, исключая из рассмотрения как можно большее число переменных. Как правило, нет необходимости определения реакций связей, поэтому исключаемыми переменными в первую очередь являются множители связей. Ляпуновым А.М. [1], Сусловым Г.К. [2], Шульгиным М.Ф. [3], Лурье А.И. [4] разработаны общие методы такого исключения, основанные на однократном или двукратном дифференцировании по времени уравнений геометрических связей.

2.2.1. Метод А.М.Ляпунова. Из уравнений движения (4) следует выразить ускорения $\ddot{q}_\gamma$, которые нужно подставить в дважды продифференцированные по времени уравнения геометрических связей (2). Из полученной системы линейных неоднородных алгебраических уравнений однозначно определяются множители как функции координат, скоростей,и потенциальных и непотенциальных сил. Подстановка найденных выражений для множителей в уравнения движения (4) дает свободную от множителей связей модель динамики размерности $2(n+m)$. Несмотря на очевидную чрезвычайную трудоемкость, похожий способ ислючения множителей находит применение в моделировании динамики робота Delta [5]. Причем в силу громоздкости преобразований авторы смогли выполнить только компьютерное симулирование поведения конкретного робота с конкретными численными значениями его параметров.

2.2.2. Некоторые альтернативные методы определения множителей связей. Методика, связанная с однократным дифференцированием геометрических связей разрабатывалась [6] и для уравнений движения, получаемых из общих теорем динамики. Для более сложных систем, когда, кроме геометрических, на систему наложены еще и неинтегрируемые (неголономные) дифференциальные связи,предлагался ([2], с. 328–331) следующий подход: уравнения геометрических связей требовалось дифференцировать два раза и один раз – уравнения дифференциальных связей, а затем подставлять в эти условные уравнения ускорения, как линейные функции множителей связи из уравнений движения. Множители находятся из полученной линейной алгебраической неоднородной системы уравнений. Использование продифференцированных геометрических (голономных) связей для исключения множителей связей предлагалось также в [4] (с. 319–321). Однако широкого распространения этот подход не получил, возможно, потому, что такой метод предлагался для систем с неинтегрируемыми дифференциальными связями, и отмечалось, что среди дифференциальных связей могли быть и интегрируемые. Размерности получаемых этими методами моделей и трудоемкость исследования остаются такими же, как в методе Ляпунова.

2.2.3. Свободные от множителей связей уравнения динамики систем с геометрическими связями в избыточных координатах. М.Ф. Шульгин [3] разработал принципиально другой способ получения уравнений без множителей связей,основанный на однократном дифференцировании уравнений связей по времени. Именно такая форма уравнений является одной из наиболее подходящих для исследования динамики систем с геометрическими связями, в особенности для рассмотрения задач устойчивости и стабилизации. Перепишем условия (3)

$$\delta s - B(q)\delta r = 0;$$

Поэтому уравнения (4) получают форму

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot r} - \frac{\partial L}{\partial r} = \tilde Q_r - B'(q)\lambda; \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot s} - \frac{\partial L}{\partial s} = \tilde Q_s + \lambda;; \tag{5}$$

откуда в общем случае можно выразить множители связей

$$\lambda = \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot s} - \frac{\partial L}{\partial s} - \tilde Q_s;$$

Подставляя эти выражения в уравнения для независимых координат, из (5) имеем

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot r} - \frac{\partial L}{\partial r} = \tilde Q_r - B'(q)\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot s} - \frac{\partial L}{\partial s} - \tilde Q_s\right);$$

Продифференцированные один раз по времени уравнения связей (2) однозначно разрешимы относительно зависимых скоростей

$$\dot s = -\left(\frac{\partial F}{\partial s}\right)^{-1}\left(\frac{\partial F}{\partial r}\right)\dot r = B(q)\dot r; \tag{6}$$

Если, используя (6) исключить зависимые скорости из выражений кинетической энергии (1) и непотенциальных сил, обозначая соответствующие выражения через $T^*(q,\dot r)$ и $Q(q,\dot r)$, сравнивая соответствующие производные $T^*(q,\dot r)$ и $T(q,\dot q)$, учитывая интегрируемость кинематических связей (6), получим математическую модель размерности $2n+m$ в виде уравнений в избыточных координатах в форме М.Ф. Шульгина:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L^*}{\partial \dot r} - \frac{\partial L^*}{\partial r} = Q_r + B'(q)\left(\frac{\partial L^*}{\partial s} + Q_s\right); \quad \dot s = B(q)\dot r; \tag{7}$$

3. Устойчивость и стабилизация конфигураций несвободных систем

Допустим, что в системе существует положение равновесия $r = r_0$, $s = s_0$; $F(r_0, s_0) = 0$. Уравнения (7) можно рассматривать как частный стучай уравнений динамики неголономных систем в форме Воронца при условии интегрируемости дифференциальных связей. Однако у неголономных систем в задаче об устойчивости равновесий $r = r_0, s = s_0$ начальные возмущения по независимым и зависимым координатам $r = r_0 + x(t_0), s = s_0 + y(t_0)$ между собой никак не связаны, а в случае связей (2) $F(r_0 + x(t_0), s_0 + y(t_0)) = 0$. Причем, в отличие от определения условной по Ляпунову устойчивости для общего уравнения возмущенного движения $\dot\eta = (\eta)$

$$\forall\varepsilon > 0 \quad \exists \quad \delta(\varepsilon) > 0 \quad \forall \quad ||\eta(t_0)|| < \delta, \quad \Phi(\eta(t_0)) = 0, t > t_0 : ||\eta(t)|| < \varepsilon;$$

из уравнений (2) следует, что не только для начального, но и для любого момента времени $F(r_0 + x(t), s_0 + y(t)) = 0$. Уравнения возмущенного движения могут быть приведены к форме (матрицы a, b, h выражаются известным образом [7])

$$\dot x = x_1; \quad \dot x_1 = ax + bx_1 + hy + X_1^{(2)}(x, x_1, z); \quad \dot y = B(x,y)x_1; \tag{8}$$

После выделения критических переменных заменой [8]

(9) $$z = y - B(0,0)x;$$

для характеристического уравнения имеем

(10) $$\lambda^m [E_n \lambda^2 - b\lambda - (a + hB(0,0))] = 0;$$

На основе теоремы Каменкова [9] с использованием условия $F(r_0 + x(t), s_0 + y(t)) = 0$ доказана [10] теорема: если действительные части всех ненулевых корней уравнения (10) отрицательны, положение равновесия асимптотически устойчиво. Согласно этой теореме стабилизация равновесия до асимптотической устойчивости в полной нелинейной системе обеспечивается решением методом [11] линейно-квадратичной задачи для линейной управляемой подсистемы

(11) $$\dot{x} = x_1; \quad \dot{x}_1 = (a + hB(0,0))x + bx_1 + Mu; \quad u = mx + m_1 x_1;$$

Таким образом, размерность задачи управления сокращена до $2n$, т.е. еще на m. При наличии циклических координат свойство асимптотической устойчивости в (11) переходом к переменным Рауса дает [12] дополнительное в сравнении с (11) уменьшение размерности задачи управления на количество неуправляемых импульсов: из управляемой подсистемы исключаются еще эти переменные. Строгость методов сокращения размерности модели позволяет рассматривать системы с учетом динамики приводов [7], в том числе с неполной информацией.

Список литературы

1. Ляпунов А.М. Лекции по теоретической механике. Киев: Наукова думка, 1982. 632 с.
2. Суслов Г.К. Теоретическая механика. Москва-Ленинград: ОГИЗ. 1946. 670 с.
3. Шульгин М.Ф. О некоторых дифференциальных уравнениях аналитической динамики и их интегрировании. Труды Среднеазиатского ун-та им. В.И. Ленина. Вып. 144. Ташкент: Издательство САГУ, 1958. 183 с.
4. Лурье А.И. Аналитическая механика. М.: Гос. изд-во физ.-мат. литературы, 1961. 824 с.
5. Brinker J., Corves B., Wahle M. Comparative study of inverse dynamics based on Clavel's Delta robot // 14th IFToMM World Congress. Taipei, 2015.
6. Новожилов И.В., Зацепин М.Ф. Уравнения движения механических систем в избыточном наборе переменных // Сборник научно-методических статей по теоретической механике. М., 1987. Вып.18. С. 62-66.
7. Krasinskiy A.Y., Krasinskaya E.M. Complex Application of the Methods of Analytical Mechanics and Nonlinear Stability Theory in Stabilization Problems of Motions of Mechatronic Systems // Radionov A., Karandaev A. (eds) Advances in Automation. RusAutoCon 2019. Lecture Notes in Electrical Engineering. Vol 641. Cham: Springer, 2020.
8. Aiserman M.A., Gantmacher F.R. Stabilitaet der Gleichgewichtslage in einem nichtholonomen System // Z. angew. Math. und Mech. 1957. Vol. 37, No. 1/2. S. 74-75.
9. Каменков Г.В. Устойчивость и колебания нелинейных систем. Избр. труды. Т. 2. М.: Наука. 1972. 211 с.
10. Krasinskiy A.Y., Krasinskaya E.M. A stabilization method for steady motions with zero roots in the closed system // Automation and Remote Control. 2016. Vol. 77, No. 8. P. 1386-1398.
11. Красовский Н.Н. Проблемы стабилизации управляемых движений // Малкин И.Г. Теория устойчивости движения. М.: Наука. 1967. С. 475-514.
12. Krasinskiy A.Y. On Stability and Stabilization with Permanently Acting Perturbations in Some Critical Cases // Tarasyev A., Maksimov V., Filippova, T. (Eds.) Stability, Control and Differential Games. Lecture Notes in Control and Information Sciences - Proceedings. Cham: Springer, 2020.