

УДК 531.391+681.5

О ПОИСКЕ НАИЛУЧШЕГО МЕТОДА ЗАДАНИЯ МОДАЛЬНЫХ МАТРИЦ ПРИ МОДАЛЬНОМ УПРАВЛЕНИИ УПРУГИМ ОБЪЕКТОМ

А.В. Федотов

Институт проблем машиноведения РАН
Россия, 199178, Санкт-Петербург, Большой проспект В.О., 61
E-mail: alvafed@yandex.ru

Ключевые слова: модальное управление, модальные матрицы, анализатор форм, синтезатор форм, наблюдатели.

Аннотация: При реализации модального управления колебаниями распределенных упругих систем требуется задавать модальные матрицы, которые определяют линейные преобразования векторов измеренных и управляющих сигналов для разделения форм колебаний объекта в системе управления. Традиционно данные матрицы вычисляются обращением матриц влияния. В работе обосновывается альтернативный подход, предполагающий транспонирование матриц влияния. Указанные подходы сравниваются на примере численного решения задачи гашения вынужденных резонансных колебаний тонкой металлической балки. В результате определяются оптимальные способы задания модальных матриц, предполагающие комбинированное использование рассматриваемых подходов. Для объяснения полученных результатов анализируются модальные амплитудно-частотные характеристики объекта, полученные для различных контуров модальной системы управления, поскольку они наглядно иллюстрируют эффективность разделения форм колебаний упругого объекта в системе управления.

1. Введение

Задача гашения колебаний упругих систем является широко распространенной в инженерной практике в таких областях, как машиностроение, робототехника, строительство, автомобильная и аэрокосмическая промышленность. В последние десятилетия развиваются методы активного гашения колебаний с помощью систем управления (СУ) с обратной связью. Такие системы включают в себя сенсоры, служащие входом СУ, и актуаторы, служащие их выходом и прикладываемые к упругому объекту необходимое управляющее воздействие. Для целей управления широко применяются пьезоэлементы вследствие своей эффективности и простоты в использовании.

На протяжении последних лет задачей исследований автора было определение наиболее эффективных методов управления упругими системами на примере задачи активного гашения вынужденных колебаний тонкой металлической балки с помощью пьезоэлементов. В рамках экспериментальных [1] и численных [2-5] исследований было рассмотрено несколько методов: локальный [6], модальный – на основе модальных фильтров [7] или наблюдателей [8], и метод управления формой (“shape control”) [9]. Показано, что в случае необходимости гашения колебаний на нескольких резонансах объекта наиболее эффективен модальный подход с наблюдателями.

В обеих постановках модального подхода используются модальные матрицы, задающие линейные преобразования векторов измеренных и управляющих сигналов с целью разделения форм колебаний объекта в системе управления. Целью настоящего численного исследования, как и более ранней работы автора [5], является изучение и сравнение эффективности различных вариантов определения модальных матриц при использовании модального подхода как с наблюдателями, так и без. При этом особенностью данной работы является акцент на объяснении полученных результатов, для чего производится отдельный анализ свойств рассматриваемых систем.

2. Обзор методов определения модальных матриц

Рассмотрим роль модальных матриц в модальном управлении колебаниями упругих систем. Наиболее наглядно она проявляется в более простой постановке модального подхода – на основе модальных и частотных фильтров. Разделение форм колебаний объекта в системе управления описывается следующими формулами:

$$(1) \quad \hat{q}_{k \times 1} = T_{k \times m} y_{m \times 1} = T_{k \times m} \Theta_{m \times n}^s q_{n \times 1},$$

$$(2) \quad Q_{n \times 1}^c = \Theta_{n \times m}^a u_{m \times 1} = \Theta_{n \times m}^a F_{m \times k} \hat{Q}_{k \times 1}.$$

где q – вектор обобщенных координат, \hat{q} – вектор их оценок, y – вектор измеренных сигналов (вход СУ), u – вектор управляющих сигналов (выход СУ), Q^c – вектор воздействий СУ на различные собственные формы (обобщенных сил), \hat{Q} – вектор желаемых воздействий СУ на собственные формы, Θ^s и Θ^a – матрицы влияния, зависящие от расположения сенсоров и актуаторов на объекте и их характеристик, T и F – модальные матрицы (анализатор и синтезатор форм); n – число собственных форм, учитываемых в модели объекта, k – число форм, по которым ведется управление ($k \leq n$), m – число сенсоров и актуаторов (полагаем их количество одинаковым, $m \leq n$).

Из формул (1,2) легко получить стандартный способ определения модальных матриц: обращение матриц влияния (при $k = m$), а в общем случае – псевдообращение:

$$(3) \quad T_{k \times m} = (\bar{\Theta}_{m \times k}^s)^+, F_{m \times k} = (\bar{\Theta}_{k \times m}^a)^+,$$

где $\bar{\Theta}_{m \times k}^s$ и $\bar{\Theta}_{k \times m}^a$ – подматрицы, соответствующие k формам, по которым ведется управление. Так выражается требование, чтобы i -й контур управления возбуждал только i -ю форму колебаний и реагировал на активизацию только этой формы.

Основная идея автора настоящей работы состоит в том, чтобы попробовать задавать модальные матрицы по-другому и выяснить, можно ли за счет этого увеличить эффективность управления. Возникла идея задавать данные матрицы не так, чтобы они не вызывали колебаний по ненужным формам, а так, чтобы различные контуры как можно меньше возбуждали друг друга. Для этого потребуем:

$$(4) \quad F_{m \times k} = (T_{k \times m})^+.$$

Предположим, что матрица T задана стандартным образом, а сенсоры и актуаторы расположены в одинаковых местах, так что матрицы влияния связаны друг с другом:

$$\bar{\Theta}_{m \times k}^s = k^{sa} (\bar{\Theta}_{m \times k}^a)^T,$$

где k^{sa} – скалярный коэффициент, зависящий от параметров сенсоров и актуаторов. Отсюда получим новое определение матрицы – синтезатора форм:

$$F_{m \times k} = (T_{k \times m})^+ = \bar{\Theta}_{m \times k}^s = k^{sa} (\bar{\Theta}_{m \times k}^a)^T.$$

То есть, матрица F находится уже не обращением, а транспонированием матрицы $\bar{\Theta}^a$. При этом каждая из форм возбуждается не так, чтобы не возбуждать остальные формы, а так, чтобы наиболее точно воспроизвести именно данную форму. Это очень близко к идее метода управления формой (“shape control”) [9]: для заданной формы объекта актуаторы создают поле деформаций, соответствующее именно этой форме.

Предложенный способ может быть применен для обеих модальных матриц. В несколько более общем виде его можно сформулировать следующим образом:

$$(5) \quad T_{k \times m} = M_{k \times k}^s (\bar{\Theta}_{m \times k}^s)^T, F_{m \times k} = (\bar{\Theta}_{k \times m}^a)^T M_{k \times k}^a.$$

Здесь M^s и M^a – диагональные матрицы, нормирующие степень измерения и воздействия на различные формы колебаний.

При увеличении числа сенсоров и актуаторов, если они стремятся покрыть весь объект управления, стандартный и альтернативный методы будут стремиться к одному и тому же результату вследствие ортогональности собственных форм колебаний упругого объекта. Преимущества предложенного метода состоят в том, что он проще с вычислительной точки зрения, к тому же в случае изменения числа форм колебаний или сенсоров и актуаторов в СУ данный метод требует не полного пересчета модальных матриц, а лишь добавления к ним или удаления соответствующих строк и столбцов.

Задачей настоящего исследования является численное сравнение эффективности модальных СУ с различными вариантами определения модальных матриц. При этом рассматриваются четыре различных конфигурации, в которых каждая из матриц определена одним из двух способов (3, 5).

3. Постановка задачи для численного исследования

В качестве объекта управления выступает тонкая алюминиевая балка длиной 70 см и толщиной 3 мм. Она упруго закреплена в одной точке на расстоянии 10 см от левого конца (рис. 1). Внешнее воздействие приложено в виде поперечной силы в точке закрепления балки. Для гашения колебаний балки используется две пары сенсор-актуатор (прямоугольные пластинки из пьезокерамики), расположенные на двух участках по обеим сторонам балки. Цель управления – гашение вынужденных колебаний балки на нескольких (двух или трех) низших резонансах.

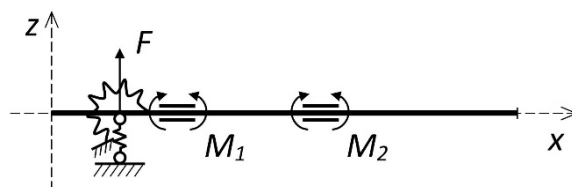


Рис. 1. Схема объекта управления с сенсорами и актуаторами.

Для численного решения задачи была создана модель системы в пакете ANSYS, затем осуществлялся синтез СУ и вычислялись характеристики замкнутой системы в пакете MATLAB. Синтез законов управления производился с помощью процедуры оптимизации [2,3], цель которой – минимизировать высоту резонансных пиков на амплитудно-частотных характеристиках (АЧХ) замкнутой системы, показывающих амплитуду колебаний точки на длинном свободном конце балки.

4. Сравнение результатов управления

4.1. Метод модальных и частотных фильтров

Модальные АЧХ объекта управления получаются из обычных АЧХ актуатор-сенсор с помощью линейных преобразований, задаваемых матрицами T и F , и показывают, как модальные контуры управления возбуждают и реагируют на

колебания объекта [1,2]. На рис. 2 представлены модальные АЧХ балки в случае управления по двум нижшим формам колебаний для четырех вариантов определения модальных матриц.

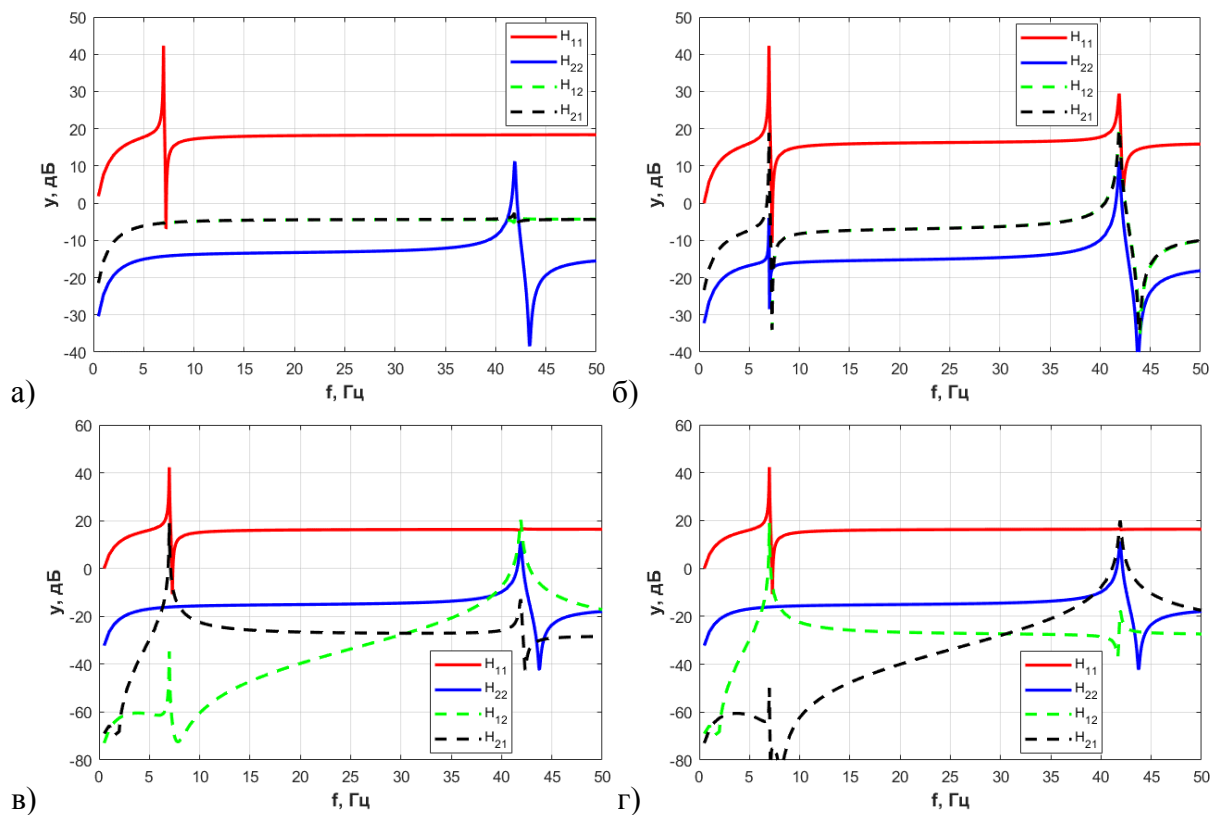


Рис. 2. Модальные АЧХ объекта управления для различных вариантов определения модальных матриц: а) обращение (обе матрицы); б) транспонирование (обе матрицы); в) обращение (T) и транспонирование (F); г) транспонирование (T) и обращение (F).

Видно, что при стандартном определении матриц (3) 1-я и 2-я формы колебаний в системе управления идеально разделяются, а взаимное влияние контуров невелико (а); в случае определения матриц транспонированием (5) разделения форм не происходит (б) – наихудший вариант; в случае комбинирования подходов (в, г) АЧХ для отдельных контуров такие же, как в случае (а), взаимное же влияние контуров вдали от резонансов еще ниже, чем в (а), однако вблизи резонансов оно проявляется сильнее.

Процесс синтеза систем управления подробно описан в работах [2-5]. В таблице 1 приводятся результаты работы СУ, синтезированных с целью снижения амплитуд колебаний балки на первом и втором резонансах. Видно, что наилучшие результаты гашения колебаний достигаются в случаях 3 и 4, где матрицы T и F определяются по-разному – фактически, выполняется условие (4). Этот результат объясняется меньшим взаимным влиянием контуров.

Таблица 1. Результаты работы систем управления без наблюдателей.

Модальные матрицы			Снижение амплитуды, дБ, на резонансе	
№	T	F	I (Δy_1)	II (Δy_2)
1	обр.	обр.	32	31,05
2	трансп.	трансп.	32,32	29,9
3	обр.	трансп.	32,72	31,48
4	трансп.	обр.	32,77	31,5

4.2. Метод наблюдателей

С использованием метода наблюдателей синтезировались СУ с целью снижения амплитуд колебаний балки на резонансах с первого по третий. В таблице 2 приводятся результаты полученных систем. Видно, что снова наилучшие результаты достигаются в случаях 3 и 4 (как и ранее, 4-я комбинация матриц наиболее эффективна).

Таблица 2. Результаты работы систем управления с наблюдателями.

Модальные матрицы			Снижение амплитуды, дБ, на резонансе		
№	T	F	I (Δy_1)	II (Δy_2)	III (Δy_3)
1	обр.	обр.	36,5	36,52	22,85
2	трансп.	трансп.	36,18	36,99	22,75
3	обр.	трансп.	36,73	38,33	21,83
4	трансп.	обр.	37,93	37,64	24,46

5. Заключение

В работе исследованы различные способы задания модальных матриц при осуществлении модального подхода к управлению упругими системами. Показано, что наилучшие результаты достигаются при комбинировании двух подходов. Наиболее эффективен вариант, при котором синтезатор форм определяется обращением матрицы влияния (стандартный способ), а анализатор – транспонированием (альтернативный способ), то есть воздействие на формы колебаний является адресным, а их измерение производится в соответствии с принципами метода управления формой (“shape control”).

Список литературы

1. Belyaev A.K., Fedotov A.V., Irschik H., Nader M., Polyanskiy V.A., Smirnova N.A. Experimental study of local and modal approaches to active vibration control of elastic systems // Structural Control and Health Monitoring. 2018. Vol. 25, No. 8. P. e2105.
2. Федотов А.В. Численное моделирование гашения колебаний распределенной системы с помощью пьезоэлементов // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки. 2019. Т. 12, № 1. С. 142-155.
3. Fedotov A.V., Belyaev A.K., Polyanskiy V.A., Smirnova N.A. Local, modal and shape control strategies for active vibration suppression of elastic systems: experiment and numerical simulation // V.A. Polyanskiy, A.K. Belyaev (Eds.). Mechanics and Control of Solids and Structures (Book Series: Advanced Structured Materials. Vol. 164). Cham, Switzerland: Springer, 2022. P. 151-169.
4. Федотов А.В., Беляев А.К., Полянский В.А. Численное исследование эффективности метода модальных фильтров и метода наблюдателей при реализации модального управления колебаниями упругих систем // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки. 2023. Т. 16, № 3. С. 160-176.
5. Федотов А.В. Сравнение подходов к определению модальных матриц при модальном управлении упругими системами с наблюдателями и без // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки. 2023. Т. 12, № 4. [В печати]
6. Kim S.-M., Elliott S.J., Brennan M.J. Decentralized control for multichannel active vibration isolation // IEEE Transactions on Control Systems Technology. 2001. Vol. CST-9, No. 1. P. 93-100.
7. Zenz G., Berger W., Gerstmayr J., Nader M., Krommer M. Design of piezoelectric transducer arrays for passive and active modal control of thin plates // Smart Structures and Systems. 2013. Vol. 12, No. 5. P. 547-577.
8. Katz R., Fridman E. Delayed finite-dimensional observer-based control of 1D parabolic PDEs via reduced-order LMIs // Automatica. 2022. Vol. 142. P. 110341.
9. Irschik H., Krommer M., Pichler U. Dynamic shape control of beam-type structures by piezoelectric actuation and sensing. International Journal of Applied Electromagnetics and Mechanics. 2003. Vol. 17. P. 251-258.