

# ОПТИМИЗАЦИЯ ДВИЖЕНИЯ ТЕЛА, УПРАВЛЯЕМОГО ПОСРЕДСТВОМ ВНУТРЕННЕЙ МАССЫ, ПРИ НАЛИЧИИ ВНЕШНЕГО СОПРОТИВЛЕНИЯ

**Ф.Л. Черноусько**

*Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН*  
Россия, 119526, Москва, проспект Вернадского, 101-1  
E-mail: chern@ipmnet.ru

**Ключевые слова:** мобильные роботы, нелинейная динамика, оптимизация.

**Аннотация:** Исследуется прямолинейное поступательное движение тела, управляемого при помощи подвижной внутренней массы, в среде с сопротивлением. Внутренняя масса совершает периодические движения относительно несущего тела с кусочно-постоянной относительной скоростью, ограниченной по величине. Рассмотрены силы сопротивления среды, пропорциональные скорости или квадрату скорости и зависящие от направления движения. Оценена средняя скорость движения. Найдены оптимальные способы управления, при которых достигается наибольшая средняя скорость перемещения.

## 1. Введение

Мобильные роботы, управляемые при помощи подвижных внутренних масс, в последнее время привлекают значительное внимание. Такие системы, называемые капсульными роботами или вибророботами, не имеют внешних подвижных элементов, а их корпуса могут быть гладкими. Эти роботы могут перемещаться в различных средах и в трубах, они используются в медицине и в технике.

Одной из первых работ по этой тематике была статья [1]. В работах [2-8] изучалась динамика мобильных систем с внутренними подвижными массами в средах с сопротивлением, проводилась оптимизация таких движений.

В данной работе, продолжающей исследования [9-11], рассматривается поступательное прямолинейное движение твердого тела, управляемое при помощи внутренней подвижной массы. Предполагается, что внутренняя масса движется относительно тела с кусочно-постоянной скоростью, ограниченной по величине. Внешняя среда оказывает сопротивление, пропорциональное скорости или квадрату скорости тела и зависящее от направления движения. Построены периодические движения системы, определена средняя скорость перемещения. Найдены способы управления, отвечающие максимальной скорости перемещения.

## 2. Постановка задачи

Мобильная система состоит из корпуса массы  $M$  и внутренней массы  $m$ , снабженной актюатором и способной перемещаться относительно корпуса со скоростью  $u$ , ограниченной по величине:  $|u| \leq u_0$  (рис. 1). Рассматривается периодическое движение системы с периодом  $T$ , при котором скорость  $u(t)$  кусочно-постоянна и задана в виде:

$$u(t) = u_1 > 0 \text{ при } t \in (0, t_1),$$

$$u(t) = -u_2 < 0 \text{ при } t \in (t_1, t_1 + t_2), t_1 + t_2 = T.$$

При  $t = 0$  и  $t = T$  внутренняя масса находится на левом конце полости длины  $L$ , в которой движется эта масса, а при  $t = t_1$  – на ее правом конце.

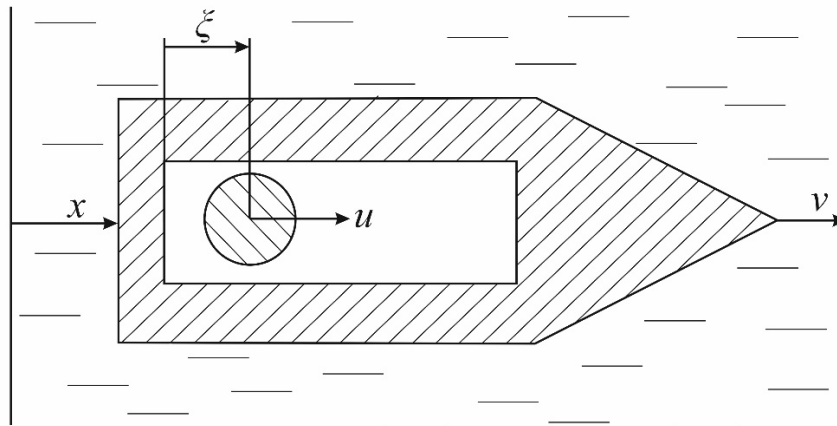


Рис. 1. Механическая система.

Силы внешнего сопротивления, действующие на корпус, заданы в виде

$$(1) \quad R(v) = \begin{cases} -k_+ v & \text{при } v > 0, \\ -k_- v & \text{при } v < 0, \end{cases}$$

в случае линейного сопротивления и в виде

$$(2) \quad R(v) = \begin{cases} -c_+ v^2 & \text{при } v > 0, \\ -c_- v^2 & \text{при } v < 0, \end{cases}$$

в случае квадратичного сопротивления, где  $k_+, k_-, c_+, c_-$  – постоянные положительные коэффициенты, причем естественно полагать, что  $k_+ < k_-, c_+ < c_-$ , то есть сопротивление при движении вперед меньше, чем при движении назад.

Требуется найти способ управления, то есть выбрать постоянные положительные параметры  $u_i$  в (1) при ограничениях  $|u_i| \leq u_0, i = 1, 2$ , при которых достигается наибольшая средняя скорость перемещения

$$(3) \quad \bar{v} = x(T)/T,$$

где  $x(T)$  – полное смещение корпуса за период  $T$ .

### 3. Основные результаты

Прежде всего, задаваясь параметрами  $u_1, u_2$ , в результате интегрирования уравнений движения, рассчитаны периодические движения системы при обоих законах сопротивления (1), (2) и найдены соответствующие средние скорости перемещения (3).

Как оказалось, эти скорости при обоих законах (1) и (2) ограничены сверху, в отличие от случая сопротивления по закону сухого трения Кулона, где они могут быть сколь угодно велики.

В случае кусочно-линейного закона сопротивления (1) имеем

$$\bar{v} = \frac{\mu L (k_- - k_+) (1 - e_1) (1 - e_2)}{k_- k_+ (1 - e_1 e_2)},$$

где введены обозначения

$$(4) \quad \mu = \frac{m}{M+m},$$

$$e_1 = \exp(-k_- t_1), e_2 = \exp(-k_+ t_2).$$

Соответствующие явные, но более громоздкие формулы получены и для квадратичного закона (2).

Проведена оптимизация средней скорости  $\bar{v}$  по параметрам  $u_1, u_2$ , причем рассмотрены случаи фиксированного и не фиксированного периода  $T$ .

Приведем здесь наибольшую величину  $\bar{v}$  для квадратичного сопротивления (2) при не фиксированном  $T$  для наиболее важного случая, когда масса внутреннего тела мала по сравнению с массой корпуса, то есть  $\mu \ll 1$  в (4):

$$\bar{v} = u_0 \mu (\sqrt{\sigma} + \sqrt{\sigma + 1})^{-2}, \sigma = c_+ / c_-.$$

Анализируются полученные результаты в зависимости от параметров системы: коэффициентов сопротивления, скорости  $u_0$ , периода  $T$ , длины  $L$ .

## 4. Заключение

Построены периодические прямолинейные движения системы, управляемой посредством внутренней массы, в среде с анизотропным линейным и квадратичным сопротивлением. Для случаев фиксированного и нефиксированного периода движения найдены максимальные средние скорости и исследовано их поведение в зависимости от конструктивных параметров. Полученные результаты могут представлять интерес для управления аппаратами, перемещающимися в жидкости.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда №23-11-00128, <https://rscf.ru/project/23-11-00128>.

## Список литературы

1. Нагаев Р.Ф., Тамм Е. А. Вибрационное перемещение в среде с квадратичным сопротивлением движению // *Машиноведение*. 1980. № 4. С. 3-8.
2. Герасимов С.А. О вибрационном полете симметричной системы // *Известия вузов. Машиностроение*. 2005. № 8. С. 3-7.
3. Егоров А.Г., Захарова О.С. Оптимальное квазистационарное движение виброробота в вязкой среде // *Известия вузов. Математика*. 2012. № 2. С. 57-64.
4. Liu Y., Wiercigroch M., Pavlovskaya E., Yu. Y. Modeling of a vibro-impact capsule system // *International Journal of Mechanical Sciences*. 2013. Vol. 66. P. 2-11.
5. Liu Y., Pavlovskaya E., Hendry D., Wiercigroch M. Optimization of the vibroimpact capsule system // *Journal of Mechanical Engineering*. 2016. Vol. 62. P. 430-439.
6. Fang H.B., Xu J. Dynamics of a mobile system with an internal acceleration-controlled mass in a resistive medium // *Journal of Sound and Vibration*. 2011. Vol. 330. P. 4002-4018.
7. Xu J., Fang H. Improving performance: recent progress on vibration-driven locomotion systems // *Nonlinear Dynamics*. 2019. Vol. 98. P. 2651-2669.
8. Tahmasian S. Dynamic analysis and optimal control of a drag-based vibratory systems using averaging // *Nonlinear Dynamics*. 2021. Vol. 104. P. 2201-2217.
9. Черноушко Ф.Л. Оптимальные периодические движения двухмассовой системы в сопротивляющейся среде // *Прикладная математика и механика*. 2008. Т. 72. Вып. 2. С. 202-215.
10. Черноушко Ф.Л., Болотник Н.Н. Динамика мобильных систем с управляемой конфигурацией. М.: Физматлит, 2022. 464 с.
11. Черноушко Ф.Л. Оптимизация движения тела с внутренней массой при квадратичном сопротивлении // *Доклады РАН. Физика, технические науки*. 2023. Т. 513. С. 80-86.