УДК 629.7

ПЕРИОДИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ СИСТЕМЫ ДВУХ ТЕЛ, СОЕДИНЕННЫХ СФЕРИЧЕСКИМ ШАРНИРОМ, В ПЛОСКОСТИ ЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ ОРБИТЫ

С.А. Гутник
МГИМО МИД России
Россия, 119454, Москва, Проспект Вернадского, 76
E-mail: s.gutnik@inno.mgimo.ru

Ключевые слова: система двух тел, сферический шарнир, гравитационный момент, эллиптическая орбита, уравнения Лагранжа, степенные ряды, периодические решения.

Аннотация: В работе приводятся результаты исследования плоских периодических колебаний системы двух тел, соединенных сферическим шарниром, которая движется по эллиптической орбите в гравитационном поле Земли. Движение системы двух тел по эллиптической орбите описывается системой дифференциальных уравнений второго порядка с периодическими коэффициентами. С использованием методов теории возмущений, периодические решения уравнений движения строятся в форме степенных рядов по малому параметру. Используя предложенный подход, было показано, что движение системы двух тел в плоскости слабо эллиптической орбиты определяются в форме периодических колебаний. При построении решений в форме степенных рядов широко использовались системы символьных вычислений.

1. Введение

В работе представлены результаты исследования динамики системы двух тел (спутник-стабилизатор), соединенных сферическим шарниром, движущейся по эллиптической орбите в центральном гравитационном поле в плоскости орбиты. Исследование динамики системы двух тел, движущихся по эллиптической орбите, представляет практической интерес для создания составных схем гравитационной системы ориентации спутников, которые могут функционировать на орбите продолжительное время без расходования энергии и рабочего тела. Действие стабилизатора на спутник позволяет обеспечить устойчивые ориентации системы двух тел и ввести диссипацию в систему.

Подробное рассмотрение динамики различных типов составных схем спутник-стабилизатор и гравитационных систем ориентации представлено в [1, 2]. Большой цикл работ был посвящен исследованию положений равновесия и динамики двух соединённых шарниром тел на круговой орбите в случае, когда сферический шарнир расположен на пересечении главных центральных осей инерции спутника и стабилизатора и когда сферический шарнир расположен на линии пересечения двух плоскостей, образуемых главными центральными осями инерции спутника и стабилизатора в [3-7]. На круговой орбите имеют место пространственные колебания системы двух связанных тел в окрестности положений равновесия. В работе [8] исследованы собственные колебания системы двух тел и найдены оптимальные по скорости параметры системы для ее перехода к равновесию.

Детальное исследование колебаний спутника (твёрдого тела) в плоскости эллиптической орбиты и условий их устойчивости проведено в работе [9]. Исследования плоских колебаний системы двух связанных тел на эллиптической орбите, проводились лишь для простых случаев, когда центры масс первого и второго тел совпадают [10, 11].

В данной работе рассматриваются плоские колебания системы двух тел на эллиптической орбите в случае, когда сферический шарнир расположен на пересечении главных центральных осей инерции первого и второго тела. Применяя методы символьных вычислений, с помощью систем компьютерной алгебры удается построить периодическое решение задачи в виде степенного ряда по малому параметру.

2. Уравнения движения

Рассмотрим задачу о движении системы двух тел, соединенных сферическим шарниром, по эллиптической орбите [1]. Для записи уравнений движения системы двух тел введем следующие правые системы координат: $OXYZ$ – орбитальная система координат; ось OZ направлена вдоль радиуса-вектора, соединяющего центр масс C Земли и центр масс O системы двух тел; ось OX направлена вдоль вектора линейной скорости центра масс O, ось OY совпадает с нормалью к плоскости орбиты. Оси систем координат $O_1x_1y_1z_1$ и $O_2x_2y_2z_2$ направлены вдоль главных центральных осей инерции спутника и стабилизатора соответственно (рис. 1). Ориентацию системы координат $O_ix_iy_iz_i$ относительно орбитальной системы координат определим с использованием самолетных углов тангажа α_i, рыскания β_i и крена γ_i [1]. Индекс $i = 1$ ($i = 2$) относится к телу 1 – спутнику (телу 2, стабилизатору).

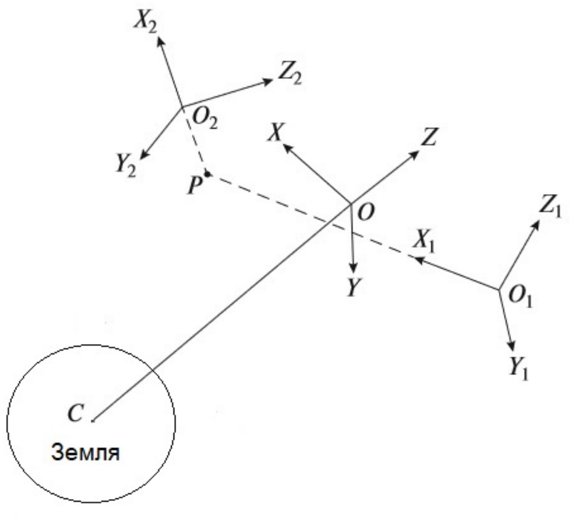

Рис. 1. Основные системы координат.

Пусть (a_i, b_i, c_i) – координаты сферического шарнира P в связанной с телом системе координат $O_ix_iy_iz_i$; A_i, B_i, C_i – главные центральные моменты инерции тел, $M = M_1M_2/(M_1 + M_2)$; M_i – масса i-го тела; Рассмотрим случай, когда шарнир расположен на пересечении главных центральных осей инерции спутника и стабилизатора, тогда $b_1 = b_2 = c_1 = c_2 = 0$ и движения системы двух тел происходят в плоскости орбиты $\alpha_1 \neq 0, \alpha_2 \neq 0, \beta_1 = \beta_2 = \gamma_1 = \gamma_2 = 0$, $\dot{\alpha}_1 = d\alpha_1/dt$, $\dot{\alpha}_2 = d\alpha_2/dt$, ω–угловая скорость движения центра масс системы двух тел по эллиптической орбите. Тогда координаты сферического шарнира в связанных с каждым телом системе координат будут иметь значения $(a_i, 0, 0)$. В этом случае имеют место выражения для кинетической энергии

$$T = \frac{1}{2}(B_1 + Ma_1^2)(\dot{\alpha}_1 + \omega)^2 + \frac{1}{2}(B_2 + Ma_2^2)(\dot{\alpha}_2 + \omega)^2 - \\ -Ma_1 a_2 \cos(\alpha_1 - \alpha_2)(\dot{\alpha}_1 + \omega)(\dot{\alpha}_2 + \omega) \tag{1}$$

и силовой функции

$$U = \frac{3M\mu}{2\rho^3}(a_1 \sin\alpha_1 - a_2 \sin\alpha_2)^2 - \\ -\frac{3\mu}{2\rho^3}((A_1 - C_1)\sin^2\alpha_1 - (A_2 - C_2)\sin^2\alpha_2) + \frac{M\mu}{\rho^3} a_1 a_2 \cos(\alpha_1 - \alpha_2). \tag{2}$$

Здесь ρ радиальное расстояние между центром масс Земли C и центром масс системы двух тел O (рис. 1); $\mu = fM_0$, где f постоянная тяготения, M_0 масса Земли; $\omega = d\vartheta/dt = \omega_0(1 + e\cos\vartheta)^2$; $\mu/\rho^3 = \omega_0^2(1 + e\cos\vartheta)^3$; ϑ истинная аномалия и e эксцентриситет орбиты. На круговой орбите $\omega = \omega_0$, $\mu/\rho^3 = \omega_0^2$, $\vartheta = \omega_0 t$.

Используя выражения для кинетической энергии (1) и силовой функции (2), определяющей действие гравитационного поля Земли на систему двух тел, уравнения движения этой системы можно записать в форме уравнений Лагранжа второго рода, используя возможности символьного дифференцирования в виде системы дифференциальных уравнений второго порядка по переменным α_1, α_2 [1]

$$\begin{gathered}(B_1 + Ma_1^2)\ddot{\alpha}_1 - Ma_1 a_2 \cos(\alpha_1 - \alpha_2)\ddot{\alpha}_2 - \\ - Ma_1 a_2((\dot{\alpha}_2 + \omega)^2 - \mu/\rho^3)\sin(\alpha_1 - \alpha_2) \\ +3\,\mu/\rho^3\,(((A_1 - C_1) - Ma_1^2)\sin\alpha_1 + Ma_1\,a_2\sin\alpha_2)\cos\alpha_1 + \\ +((B_1 + Ma_1^2) - Ma_1\,a_2\cos(\alpha_1 - \alpha_2))\dot{\omega} = 0, \\ -Ma_1 a_2 \cos(\alpha_1 - \alpha_2)\ddot{\alpha}_1 + (B_2 + Ma_2^2)\ddot{\alpha}_2 + \\ +Ma_1 a_2((\dot{\alpha}_1 + \omega)^2 - \mu/\rho^3)\sin(\alpha_1 - \alpha_2) + \\ +3\,\mu/\rho^3\,(\,(\,(A_2 - C_2) - Ma_2^2)\sin\alpha_2 + Ma_1\,a_2\sin\alpha_1)\cos\alpha_2 + \\ +((B_2 + Ma_2^2) - Ma_1\,a_2\cos(\alpha_1 - \alpha_2))\dot{\omega} = 0,\end{gathered} \tag{3}$$

определяющие колебания системы в плоскости эллиптической орбиты. В уравнениях (3) точкой обозначено дифференцирование по времени t.

На эллиптической орбите нулевого положения равновесия ($\alpha_1 = \alpha_2 = \beta_1 = \beta_2 = \gamma_1 = \gamma_2 = 0$) системы не существует из-за неравномерности вращения радиуса-вектора, соединяющего центры масс Земли и системы двух тел. Это положение равновесия, которое имеет место на круговой орбите переходит в периодические эксцентриситетные колебания в плоскости орбиты при $\beta_1 = \beta_2 = \gamma_1 = \gamma_2 = 0$. Эксцентриситетные колебания представляют собой частное периодическое решение системы уравнений (3). Легко видеть, что системе (3) удовлетворяет стационарное решение

$$\alpha_1 = \alpha_2 = 0. \tag{4}$$

Целью настоящей работы является вычисление периодического решения системы уравнений (3) в форме степенных рядов по малому параметру эксцентриситета e ($e \ll 1$) в окрестности стационарного решения (4) с использование процедур символьных вычислений степенных рядов.

3. Периодические решения

При проведении расчетов будем предполагать, что колебания малы и тогда проведем замену синуса и косинуса в (3) их разложением в степенной ряд. Проведя замену $dt = d\vartheta/\omega_0(1+e\cos\vartheta)^2$ и упрощая тригонометрические выражения, перейдем в уравнениях (3) от переменной t к новой независимой переменной ϑ в следующем виде:

$$
\begin{aligned}
&-(1+e\cos\vartheta)\alpha''_2 + 2e\alpha'_2\sin\vartheta + 3(A_1 - C_1 - Ma_1^2)/Ma_1\,a_2 + 4) + \\
&+((1+e\cos\vartheta)\alpha''_1 - 2e\alpha'_1\sin\vartheta)(B_1 + Ma_1^2)/Ma_1\,a_2 - \\
&-e(1+e\cos\vartheta)(\alpha'_2+1)^2 + e(2\sin\vartheta(1-(B_1+Ma_1^2)/Ma_1\,a_2) = 0, \\
&-(1+e\cos\vartheta)\alpha''_1 + 2e\alpha'_1\sin\vartheta + 3(A_2 - C_2 - Ma_2^2)/Ma_1\,a_2 + 2) + \\
&+((1+e\cos\vartheta)\alpha''_2 - 2e\alpha'_2\sin\vartheta)(B_2 + Ma_2^2)/Ma_1\,a_2 + \\
&+e(1+e\cos\vartheta)(\alpha'_1+1)^2 + e(2\sin\vartheta(1-(B_2+Ma_2^2)/Ma_1\,a_2) = 0.
\end{aligned} \tag{5}
$$

Символ штрих в (5) означает дифференцирование по переменной ϑ. Нетрудно убедиться, что общего аналитического решения нелинейной системы (5) не существует. Для поиска решений системы (5) будем использовать методы теории возмущений [12] и алгоритмы символьных вычислений степенных рядов, предложенные в работах [13] и [14]. Периодическое решение, определяющее эксцентриситетные колебания системы двух соединенных тел, будем искать в виде разложения в ряд по степеням малого параметра $e(e \ll 1)$:

$$\alpha_1(\vartheta) = e\alpha_1^{(1)}(\vartheta) + e^2\alpha_1^{(2)}(\vartheta) + \ldots,\ \alpha_2(\vartheta) = e\alpha_2^{(1)}(\vartheta) + e^2\alpha_2^{(2)}(\vartheta) + \ldots. \tag{6}$$

Вычисление решений $\alpha_1(\vartheta)$ и $\alpha_2(\vartheta)$ в (6) производилось с использованием алгоритмов, предложенных в работах [13] и [14], которое потребовало проведение очень громоздких символьных вычислений.

Подставляя выражения (6) в (5) и собирая коэффициенты при равных степенях e, получим набор систем линейных дифференциальных уравнений, которые будем решать последовательно. Например, используя в (6) только первые линейные элементы, получим соответствующие периодические решения в виде

$$\alpha_1^{(1)}(\vartheta) = \bar{a}_1\sin\vartheta + \bar{b}_1\cos\vartheta,\ \alpha_2^{(1)}(\vartheta) = \bar{a}_2\sin\vartheta + \bar{b}_2\cos\vartheta. \tag{7}$$

Здесь коэффициенты $\bar{a}_1, \bar{b}_1, \bar{a}_2, \bar{b}_2$ определяются из линейной системы алгебраических уравнений. Выражения для квадратов амплитуд вынужденных колебаний спутника и стабилизатора имеют вид

$$R_1^2 = (\bar{a}_1^2 + \bar{b}_1^2)e^2 = 4\frac{e^2 b^2}{d^2}, R_2^2 = (\bar{a}_2^2 + \bar{b}_2^2)e^2 = 4\frac{e^2 \bar{b}^2}{d^2}, \tag{8}$$

$$
\begin{aligned}
&b = (B_1 + Ma_1(a_1 - a_2))(3A_2 - 3C_2 - B_2) - 4Ma_2(a_1B_2 + a_2B_1), \\
&\bar{b} = (B_2 + Ma_2(a_1 - a_2))(3A_1 - 3C_1 - B_1) - 4Ma_1(a_1B_2 + a_2B_1), \\
&d = (3A_1 - 3C_1 - B_1)(3A_2 - 3C_2 - B_2) - 4Ma_1^2(3A_2 - 3C_2 - B_2) - \\
&-4Ma_2^2(3A_1 - 3C_1 - B_1).
\end{aligned} \tag{9}
$$

В выражениях (7)-(9) представлено первое приближение плоских периодических решений системы двух тел, связанных сферическим шарниром, которая движется по слабо эллиптической орбите.

4. Заключение

В настоящем докладе было рассмотрено линейное приближение плоских периодических решений системы двух тел, связанных сферическим шарниром, которая движется по слабо эллиптической орбите. Все вычисления в данной работе были выполнены с использованием системы символьных преобразований. На следующем этапе планируется получить квадратичные и кубические приближения периодических решений, которые потребуют очень сложных и громоздких символьных вычислений.

Список литературы

1. Сарычев В.А. Вопросы ориентации искусственных спутников. Итоги науки и техники. Сер. «Исследование космического пространства». Т. 11. М.: ВИНИТИ, 1978. 223 с.
2. Rauschenbakh, B.V., Ovchinnikov, M.Yu., McKenna-Lawlor, S.: Essential Spaceflight Dynamics and Magnetospherics. Kluwer Academic Publishers. 2003. 397 p.
3. Сарычев В. А. Положения относительного равновесия двух тел, соединенных сферическим шарниром, на круговой орбите // Космические исследования. 1967. Т. 5, № 3. С. 360-364.
4. Сарычев В. А., Сазонов В.В. Оптимальные параметры пассивных систем ориентации спутников // Космические исследования. 1976. Т. 14, № 2. С. 198-208.
5. Сарычев В. А., Мирер С.А. Оптимальные параметры гравитационной системы спутник–стабилизатор // Космические исследования. 1976. Т. 14, № 2. С. 209-219.
6. Gutnik S.A., Sarychev V.A. Symbolic investigation of the dynamics of a system of two connected bodies moving along a circular orbit // In: England M., Koepf W., Sadykov T.M., Seiler W.M., Vorozhtsov E.V. Eds. CASC 2019. LNCS. Cham: Springer, 2019. Vol. 11661. P. 164-178.
7. Гутник С.А., Сарычев В.А. Исследование динамики системы двух связанных тел в плоскости круговой орбиты с применением методов компьютерной алгебры // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2023. Т. 63, № 1. С. 112-120.
8. Sarychev V.A., Mirer S.A., Sazonov V.V. Plane oscillations of a gravitational system satellite-stabilizer with maximal speed of response // Acta Astronautica. 1976. Vol. 3, No. 9-10. P. 651-669.
9. Zlatoustov, V.A., Markeev, A.P. Stability of planar oscillations of a satellite in an elliptic orbit // Celestial Mechanics. 1973. Vol. 7, No. 1. P. 31-45.
10. Пеньков В.И. Компенсация эксцентриситетных колебаний спутника с гравитационной системой стабилизации // Космические исследования. 1977. Т. 15. № 3. С. 376-383.
11. Clark J.P.C. Response of a two-body gravity gradient system in a slightly eccentric orbit // Journal of Spacecraft and Rockets. 1970. Vol. 7, No. 3. P. 294-298.
12. Nayfeh, A.H. Introduction to Perturbation Techniques. New York: John Wiley and Sons, 1993. 533 p.
13. Prokopenya, A.N. Symbolic computation in studying stability of solutions of linear differential equations with periodic coefficients // Programming and Computer Software. 2007. Vol. 33, No. 2. P. 60-66.
14. Prokopenya, A.N. Construction of a periodic solution to the equations of motions of generalized Atwood's machine using computer algebra // Programming and Computer Software. 2020. Vol. 46, No. 2. P. 120-125.