УДК 519.711.3, 629.7.052

К ЗАДАЧЕ СТАБИЛИЗАЦИИ ОТНОСИТЕЛЬНОГО РАВНОВЕСИЯ СПУТНИКА

В.И. Каленова
НИИ механики МГУ им. М.В.Ломоносова
Россия, 119899, Москва, Мичуринский пр., 1
E-mail: kalenova44@mail.ru

В.М. Морозов
НИИ механики МГУ им. М.В.Ломоносова
Россия, 119899, Москва, Мичуринский пр., 1
E-mail: mor@imec.msu.ru

А.А. Тихонов
Санкт-Петербургский государственный университет
Россия, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7-9.
E-mail:a.tikhonov@spbu.ru

Ключевые слова: задачи управления, стабилизация спутников, модели геомагнитного поля, нестационарные системы, приводимость.

Аннотация: Рассматривается задача стабилизации относительного равновесия спутника в случае использования моментов, создаваемых силами Лоренца. При исследовании используется октупольное приближение модели геомагнитного поля. Математической моделью задачи стабилизации является линейная нестационарная система, приводимая к стационарной системе. Этот факт позволяет эффективно анализировать и строить алгоритмы стабилизации.

1. Введение

При решении задач стабилизации стационарных движений спутника для создания управляющих моментов необходимо использовать те или иные математические модели геомагнитного поля.

Существуют различные модели геомагнитного поля: «прямой» магнитный диполь, «наклонный» магнитный диполь, квадрупольное и октупольное приближения и др. [1].

В большинстве теоретических исследований проблем стабилизации, как с помощью внутренних магнитных моментов, создаваемых бортовыми магнитными катушками [2, 3], так и с помощью моментов сил Лоренца [2, 4, 5], используется самая простая модель – «прямой» магнитный диполь [2, 3]. Модель «наклонного» магнитного диполя не является корректной, как указано в [6].

Здесь рассматривается наиболее полная из упомянутых – октупольная модель. Компоненты вектора магнитной индукции $\mathbf{b}(t)$ в орбитальной системе координат при движении в экваториальной плоскости имеют вид [1]

(1)

$$b_1 = \mu_0\{(g_1^1 s\tau - h_1^1 c\tau) + \nu(g_2^2 s2\tau - h_2^2 c2\tau) + \frac{\sqrt{6}}{12}\nu^2\left[\sqrt{15}(g_3^3 s3\tau - h_3^3 c3\tau) - (g_3^1 s\tau - h_3^1 c\tau)\right]\}$$

$$b_2 = -\mu_0\{g_1^0 + \nu(g_2^1 c\tau + h_2^1 s\tau) + \frac{1}{6}\nu^2\left[\sqrt{15}(g_3^2 c2\tau + h_3^2 s2\tau) - 3g_3^0\right]\}$$

$$b_3 = \mu_0\left\{2(g_1^1 c\tau + h_1^1 s\tau) + \frac{\sqrt{3}}{2}\nu\left[\sqrt{3}(g_2^2 c2\tau + h_2^2 s2\tau) - g_2^0\right] +\right.$$

$$\left. + \frac{\sqrt{2}}{3}\nu^2\left[\sqrt{5}(g_3^3 c3\tau + h_3^3 s3\tau) - \sqrt{3}(g_3^1 c\tau + h_3^1 s\tau)\right]\right\}$$

где $\mu_0 = \left(\frac{R_E}{R}\right)^3$, $\nu = \sqrt{3}\frac{R_E}{R}$, $\tilde{g}_2^0 = \frac{g_2^0}{\sqrt{3}}$. Здесь g_n^m, h_n^m – гауссовы коэффициенты; $\tau = \omega_0(1 - \varepsilon)t, \varepsilon = \frac{\omega_E}{\omega_0}$, ω_0– орбитальная угловая скорость, ω_E – угловая скорость собственного вращения Земли; R – радиус орбиты; R_E – радиус Земли.

2. Стабилизация спутника моментами сил Лоренца

Рассмотрим задачу стабилизации относительного равновесия спутника в случае использования моментов, создаваемых силами Лоренца.

Момент лоренцевых сил относительно центра масс спутника определяется по формуле [5-8]

(1) $$\mathbf{M} = q\mathbf{r}_q \times \Theta^T(\mathbf{V}_c \times \mathbf{b}).$$

Здесь q – электростатический заряд, $\mathbf{r}_q = \left[x_q\ y_q\ z_q\right]^{\mathrm{T}}$ – радиус-вектор центра заряда спутника относительно его центра масс; Θ – матрица направляющих косинусов связанной системы координат относительно орбитальной;$\mathbf{V}_c = R\omega_0(1-\varepsilon)\mathbf{e}_\tau$ – скорость центра масс спутника относительно геомагнитного поля, $\mathbf{e}_\tau$ – единичный вектор оси орбитальной системы координат, который направлен по касательной к орбите; ω_0 – орбитальная угловая скорость, ω_E – угловая скорость собственного вращения Земли; R – радиус орбиты; R_E – радиус Земли; $\varepsilon = \omega_E/\omega_0$.

Линеаризованные уравнения управляемого движения спутника в окрестности положения относительного равновесия на круговой экваториальной орбите имеют вид

(2) $$\ddot{x}_1 - \tilde{d}_1\dot{x}_3 - \tilde{\kappa}_1 x_1 = \frac{\mu_{**}}{J_1}(b_2u_2 + b_3u_3), \ddot{x}_3 + \tilde{d}_3\dot{x}_1 - \tilde{\kappa}_3 x_3 = -\frac{\mu_{**}}{J_3}b_3u_1.$$
$$\ddot{x}_2 - \tilde{\kappa}_2 x_2 = -\frac{\mu_{**}}{J_2}b_2u_1$$

Здесь $\tau = \omega_0(1-\varepsilon)t$ – безразмерное время; $\mu_{**} = q\cdot\omega_0^{-2}(1-\varepsilon)^{-2}$: x_1, x_2, x_3 – малые углы, определяющие положение связанной системы координат относительно орбитальной;

$$\tilde{d}_j = \frac{d_j}{1-\varepsilon}, \tilde{\kappa}_i = \frac{\kappa_i}{(1-\varepsilon)^2}, (j = 1{,}2;\ i = 1{,}2{,}3),$$
$$d_1 = \frac{d}{J_1}, d_3 = \frac{d}{J_3}, d = J_2 - J_1 - J_3;\ \kappa_1 = 4\frac{J_3 - J_2}{J_1}, \kappa_2 = 3\frac{J_3 - J_1}{J_2}, \kappa_3 = \frac{J_1 - J_2}{J_3}$$

где J_i – главные центральные моменты инерции спутника.

Величины $u_1 = x_q, u_2 = y_q, u_3 = z_q$ (координаты центра электрического заряда относительно центра масс) являются управляющими параметрами.

Для пояснения сути подхода к исследованию систем, нестационарных по управлению [9], ограничимся в выражениях (1) рассмотрением только частот 1 и 2. Тогда выражения для компонент вектора магнитной индукции **b** определяются формулами

$$
(3)\qquad
\begin{aligned}
b_1 &= \mu_0\left[(g_1^1 s\tau - h_1^1 c\tau) + \nu(g_2^2 s2\tau - h_2^2 c2\tau)\right]\\
b_2 &= -\mu_0\left[g_1^0 + \nu(g_2^1 c\tau + h_2^1 s\tau)\right]\\
b_3 &= \mu_0\left[2(g_1^1 c\tau + h_1^1 s\tau) + 1{,}5\nu\left(g_2^2 c2\tau + h_2^2 s2\tau - \tilde{g}_2^0\right)\right]
\end{aligned}
$$

Среди управлений u_i только два независимых, поэтому будем считать $u_2 \equiv 0$. Система (2), (3), записанная в виде системы первого порядка, имеет вид

$$
(4)\qquad
\begin{aligned}
\dot{x}^{(1)} &= A_1 x^{(1)} + B_1(\tau)u, x^{(1)} = [x_1 x_3 \dot{x}_1 \dot{x}_3]\\
\dot{x}^{(2)} &= A_2 x^{(2)} + B_2(\tau)u, x^{(2)} = [x_2 \dot{x}_2]
\end{aligned}
$$

Порядок нестационарной системы (4) $n = 6$. Матрицы при управлении содержат пять независимых функций $f(\tau) = [1\ c\tau\ s\tau\ c2\tau\ s2\tau]^{\mathrm{T}}$. Согласно [9] с помощью замены переменных

$$
x^{(1)} = F_1^{\mathrm{T}} \underset{(20\times 1)}{Y_1}, x^{(2)} = F_2^{\mathrm{T}} \underset{(6\times 1)}{Y_2},
$$

$$
F_1^{\mathrm{T}} = f_1^{\mathrm{T}} \otimes E_4, F_2^{\mathrm{T}} = f_2^{\mathrm{T}} \otimes E_2; f_1^{\mathrm{T}} = [c\tau\ s\tau\ c2\tau\ s2\tau\ 1], f_2^{\mathrm{T}} = [c\tau\ s\tau\ 1]
$$

ее можно привести к стационарным системам

$$
(5)\qquad \dot{Y}_i = G_i Y_i + Q^{(i)}u, (i = 1,2),
$$

$$
G_1 = E_5 \otimes A_1 - S_1 \otimes E_4, G_2 = E_3 \otimes A_2 - S_2 \otimes E_2, B_i = F_i^{\mathrm{T}} Q_i, (i = 1,2),
$$

где $\otimes$ – символ умножения Кронекера,

$$
\dot{f}_i = S_i f_i, (i = 1,2); S_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, S_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
$$

Размерность вектора состояния стационарной системы (5) равна 26.

Замечание. Учет слагаемых с частотой 3 в выражениях (3) для вектора магнитной индукции увеличит порядок приведенных стационарных систем до 42, так как количество независимых функций будет $m = 7$.

Алгоритмы стабилизации строятся на основании стационарных систем (5). Предполагается, что стационарная система управляема. Синтезированное управляющее воздействие $u = -K_y Y(\tau), (Y = [Y_1 Y_2]^{\mathrm{T}})$, обеспечивающее асимптотическую устойчивость замкнутых стационарных систем, является функцией переменных $Y(\tau)$ – вектора состояния стационарных систем более высокого порядка, чем исходная нестационарная система $(n = 6)$. Для того, чтобы ввести управление непосредственно в исходную систему, необходимо построить преобразование от переменных стационарной системы $Y(\tau)(26 \times 1)$ к исходным переменным. Следует ввести дополнительный вектор $\xi(20 \times 1)$ и построить невырожденное преобразование $X = TY$, где $X = [x^{\mathrm{T}} \xi^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$, $X = [x_1 x_3 \dot{x}_1 \dot{x}_3 x_2 \dot{x}_2]^{\mathrm{T}}$. Затем в расширенную нестационарную систему (включающую исходную как подсистему)

$$
\dot{X} = A_X X + B_X u
$$

можно вводить управление, построенное для стационарных систем, в виде

$$
u = -K_Y T^{-1} X
$$

Уравнения для дополнительных переменных ξ строятся в соответствии с процедурой, изложенной в [10].

Проведенное моделирование показало принципиальную применимость предложенных алгоритмов и продемонстрировало их работоспособность.

3. Заключение

Показано, что при решении задачи стабилизации относительного равновесия спутника моментами, создаваемыми силами Лоренца, эффективно может быть применена теория приводимости линейных нестационарных систем в том случае, когда используется октупольная модель геомагнитного поля.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 24-21-00104.

Список литературы

1. Антипов К.А., Тихонов А.А. Мультипольные модели геомагнитного поля: построение N-го приближения // Геомагнетизм и аэрономия, 2013. Т. 53, № 2, С. 271-281.
2. Морозов В.М., Каленова В.И., Рак М.Г. Стабилизация стационарных движений спутника около центра масс в геомагнитном поле // Итоги науки и техники. Сер. «Совр. матем. и ее приложения. Тематические обзоры». 2023. Т. 220. С. 71-85, Т. 221. С. 71-92, Т. 222. С. 42-63, Т. 223. С. 84-106, Т. 224. С. 115-124.
3. Овчинников М.Ю., Ролдугин Д.С. Современные алгоритмы активной магнитной ориентации спутников // Косм. аппараты и технологии. 2019. Т. 3, № 2. С. 73-86.
4. Морозов В.М., Каленова В.И. О стабилизации стационарных движений спутника в геомагнитном поле // В сб. «Устойчивость и колебания нелинейных систем управления». М.: Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, 2022. С. 290-293.
5. Тихонов А.А. Метод полупассивной стабилизации космического аппарата в геомагнитном поле // Космические исследования. 2003. Т. 41. № 1. С. 69-79.
6. Тихонов А.А. Уточнение модели «наклонный диполь» в задаче об эволюции вращательного движения заряженного тела в геомагнитном поле // Космич. исслед. 2002. Т. 40, № 2, С. 171-177.
7. Петров К.Г., Тихонов А.А. Момент сил Лоренца, действующих на заряженный спутник в магнитном поле Земли. Ч.2: Вычисление момента и оценки его составляющих // Вестн. С.- Петербург. ун-та. Сер. 1. 1999. Вып. 3 (№ 15). С. 81-91.
8. Александров А.Ю., Тихонов А.А. Электродинамическое управление с распределенным запаздыванием для стабилизации ИСЗ на экваториальной орбите // Космич. исслед. 2022. Т. 60, № 5. С. 404-412.
9. Каленова В.И., Морозов В.М. Линейные нестационарные системы и их приложения к задачам механики. М: Физматлит, 2010. 207 с.
10. Морозов В.М., Каленова. Линейные нестационарные системы и стабилизация движения спутника около центра масс в геомагнитном поле. М.: Издательство Московского университета. 2023. 174 с.