УДК 62-50

УПРАВЛЕНИЕ ПРЯМОЛИНЕЙНЫМ ДВИЖЕНИЕМ СИСТЕМЫ ДВУХ ТЕЛ В ВЯЗКОЙ СРЕДЕ

Т.А. Мосенков
Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова
Россия, 119991, Москва, Ленинские горы, 1,
E-mail: timofei.mosenkov@math.msu.ru

Т.Ю. Фигурина
Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН
Россия, 119526, Москва, пр-т Вернадского, 101, корп. 1
E-mail: t_figurina@mail.ru

Ключевые слова: система двух тел, квадратичное сопротивление, управление.

Аннотация: Решена задача о перемещении системы двух тел вдоль прямой на заданное расстояние. В начальный и конечный момент скорости обоих тел равны нулю. Управлением является сила взаимодействия тел, на ее величину ограничений не наложено. Каждое из тел взаимодействует со средой, закон сопротивления движению предполагается квадратичным по скорости.

1. Введение

Системы взаимодействующих тел могут двигаться в сопротивляющихся средах без наличия специальных движителей таких, как колеса, гусеницы, ноги и при неизменности точек контакта тел со средой. При взаимодействии тел системы изменяются их скорости, а вместе с ними и силы сопротивления среды. Управляя силами взаимодействия тел можно управлять внешними силами, действующими на систему, и ее движением в целом.

Движение систем взаимодействующих тел вдоль прямой рассматривалось во множестве публикаций, большая часть которых была посвящена капсульным системам, в которых одно из тел (внутреннее) не взаимодействует со средой. Меньшее количество публикации посвящено системам, все тела которых взаимодействуют со средой, и небольшое количество исследуют систему двух тел; управление системой двух тел во многих случаях сложнее управления системой трех и более тел. Различные режимы движения двух взаимодействующих тел вдоль прямой с изотропным и анизотропным сухим трением строилось и оптимизировались по параметрам в работах [1, 2]. В статье [3] решена задача оптимального управления системой двух тел на прямой с Кулоновым трением с целью переместить систему на заданное расстояние за минимальное время, в том числе в классе безреверсных движений. Движение системы двух тел вдоль прямой с вязким трением изучалось в работе [4] в предположении, что силы сопротивления малы по сравнению с силами взаимодействия тел.

В данной работе изучается движение двух взаимодействующих тел вдоль прямой в вязкой изотропной среде с квадратичным сопротивлением. Малости сил сопротивления среды не предполагается.

2. Постановка задачи

Рассматривается прямолинейное движение двух взаимодействующих тел A_1 и A_2 в среде с квадратичным сопротивлением (рис.1). Обозначим через m_1 и m_2 массы тел A_1 и A_2, через x_1 и x_2 – координаты этих тел вдоль прямой их движения, и через

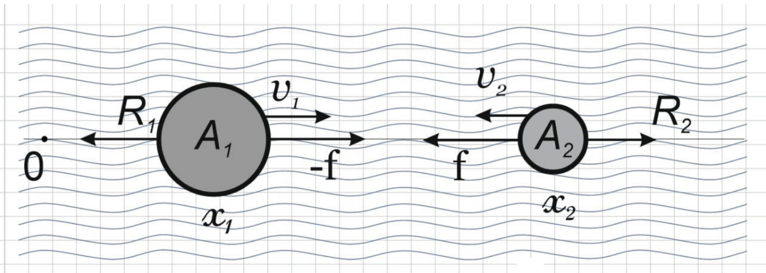

Рис. 1. Система двух взаимодействующих тел в вязкой среде

v_1 и v_2 – скорости тел. Пусть f – сила, действующая со стороны тела A_1 на тело A_2. Уравнения движения системы тел имеют вид

$$(1)\qquad \dot{x}_i = v_i, \quad m_i\dot{v}_i = (-1)^i f + R_i(v_i), \qquad i = 1, 2,$$

где силы квадратичного сопротивления $R(v_i)$ определяются соотношениями

$$(2)\qquad R_i(v_i) = -c_i v_i |v_i|, \quad i = 1, 2.$$

Пусть в начальный момент времени тела покоятся и выполнены равенства

$$(3)\qquad x_i(0) = 0, \quad v_i(0) = 0, \quad i = 1, 2.$$

Найдем движения, перемещающее оба тела системы на заданное расстояние L и приводящее систему в состояние покоя в конце движения:

$$(4)\qquad x_i(T) = L, \quad v_i(T) = 0, \quad i = 1, 2,$$

Время движения T заранее не задано, ограничений на силу взаимодействия тел f не налагается. Предполагается, что выполнено неравенство $m_1^2 c_2 \neq m_2^2 c_1$ (иначе центр масс системы невозможно вывести из состояния покоя). Без ограничения общности положим, что

$$(5)\qquad m_1^2 c_2 > m_2^2 c_1.$$

3. Решение задачи

Обозначим через p суммарный импульс системы $p = m_2v_2 + m_1v_1$. Будем искать движение, в котором моменты времени, когда импульс системы мгновенно перераспределяется между телами, скорости тел изменяются скачком, а сила взаимодействия тел выражается дельта-функцией Дирака, чередуются с интервалами времени, на которых тела не взаимодействуют. Рассмотрим движение, состоящее из трех этапов, с длительностями τ_1, τ_2, τ_3.

Этап 1. В начальный момент времени перераспределим нулевой импульс системы, так что тело A_1 приобретет положительную скорость, тело A_2 – отрицательную скорость, и скорости будут определяться равенствами:

$$v_1(0) = \frac{m_2}{m_1}, \qquad v_2(0) = -1. \tag{6}$$

Затем при $t \in (0, \tau_1)$, тела движутся свободно, сила взаимодействия тождественно равна нулю, $f \equiv 0$. Выражения для координат тел в конце первого этапа движения системы имеют вид

$$x_1(\tau_1) = \frac{m_1}{c_1}\ln\left(\frac{c_1m_2}{m_1^2}\tau_1 + 1\right), \qquad x_2(\tau_1) = -\frac{m_2}{c_2}\ln\left(\frac{c_2}{m_2}\tau_1 + 1\right). \tag{7}$$

В силу (5) импульс системы $p(t)$ монотонно возрастает в некоторой окрестности нуля и положителен на всем первом этапе движения. Обозначим импульс в конце первого этапа через p^*, $p^* = p(\tau_1) > 0$.

Этап 2. Мгновенно перераспределим импульс p^* между телами A_1 и A_2 так, что оба тела приобретут одинаковую положительную скорость

$$v_1(\tau_1) = v_2(\tau_1) = v^* = \frac{p^*}{m_1 + m_2}. \tag{8}$$

Затем выберем силу взаимодействия между телами так, чтобы система двигалась как единое целое, то есть чтобы скорости тел совпадали $v_1 \equiv v_2$, $t \in (\tau_1, \tau_1 + \tau_2)$. При этом скорости тел подчиняются уравнению

$$\dot{v}_i = -\frac{c_1 + c_2}{m_1 + m_2}v_i^2, \quad t \in (\tau_1, \tau_1 + \tau_2), \qquad i = 1, 2. \tag{9}$$

Пути, пройденные телами на втором этапе, равны и записываются в виде

$$x_i(\tau_1 + \tau_2) - x_i(\tau_1) = \frac{m_1 + m_2}{c_1 + c_2}\ln\left(\frac{c_1 + c_2}{m_1 + m_2}v^*\tau_2 + 1\right), \qquad i = 1, 2. \tag{10}$$

При любых заданных $l > 0$ и $v^* > 0$ существует единственное значение $\tau_2 > 0$, при котором каждое из тел проходит расстояние l на втором этапе движения,

$$x_i(\tau_1 + \tau_2) - x_i(\tau_1) = l, \qquad i = 1, 2. \tag{11}$$

Обозначим через $\tilde{p}$ значение импульса в конце второго этапа, $\tilde{p} = p(\tau_1 + \tau_2) > 0$.

Этап 3. В момент времени $\tau_1 + \tau_2$ мгновенно перераспределим импульс системы $\tilde{p}$ так, что тело A_1 приобретет отрицательную скорость $\widetilde{v}_1$, а тело A_2 – положительную скорость $\widetilde{v}_2$,

$$\tilde{p} = m_1\widetilde{v}_1 + m_2\widetilde{v}_2, \quad \widetilde{v}_1 < 0, \quad \widetilde{v}_2 > 0. \tag{12}$$

Из положительности импульса $\tilde{p}$ следует неравенство

(13) $$\frac{m_2}{|\widetilde{v}_1|} > \frac{m_1}{\widetilde{v}_2}.$$

Затем в течение третьего этапа тела движутся свободно, $f \equiv 0$. Скорости тел в конце третьего этапа определяются равенствами

(14) $$v_1(T) = -\frac{1}{\dfrac{c_1}{m_1}\tau_3 + \dfrac{1}{|\widetilde{v}_1|}}, \quad v_2(T) = \frac{1}{\dfrac{c_2}{m_2}\tau_3 + \dfrac{1}{\widetilde{v}_2}}, \qquad T = \tau_3 + \tau_2 + \tau_3.$$

Приравняв импульс системы в конце третьего этапа к нулю, $p(T) = 0$, получим уравнение относительно длительности третьего этапа

(15) $$\left(\frac{m_1 c_2}{m_2} - \frac{m_2 c_1}{m_1}\right)\tau_3 = \frac{m_2}{|\widetilde{v}_1|} - \frac{m_1}{\widetilde{v}_2},$$

которое имеет единственное положительное решение τ_3, в силу (5) и (13). Смещения тел на третьем этапе, при τ_3, определяемом из (15), имеют вид

(16) $$x_1(T) - x_1(\tau_1 + \tau_2) = -\frac{m_1}{c_1}\ln\frac{m_1\,(m_1 c_2 - m_2 c_1 \lambda)}{m_1^2 c_2 - m_2^2 c_1},$$

(17) $$x_2(T) - x_2(\tau_1 + \tau_2) = \frac{m_2}{c_2}\ln\frac{m_2\,(m_1 c_2 - m_2 c_1 \lambda)}{\lambda(m_1^2 c_2 - m_2^2 c_1)}.$$

Здесь введена переменная λ со значениями, согласно (13), из интервала

(18) $$\lambda = \frac{|\widetilde{v}_1|}{\widetilde{v}_2}, \qquad \lambda \in \left(0, \frac{m_2}{m_1}\right).$$

Поскольку смещения обоих тел на втором этапе одинаковы, требование $x_1(T) = x_2(T)$ означает, что сумма расстояний, пройденных на первом и третьем этапе, равна для обоих тел, то есть с учетом (16), (17) и (7), выполнено

(19) $$\frac{m_1}{c_1}\ln\frac{m_1\,(m_1 c_2 - m_2 c_1 \lambda)}{m_1^2 c_2 - m_2^2 c_1} + \frac{m_2}{c_2}\ln\frac{m_2\,(m_1 c_2 - m_2 c_1 \lambda)}{\lambda(m_1^2 c_2 - m_2^2 c_1)} =$$
$$= \frac{m_1}{c_1}\ln\left(\frac{c_1 m_2}{m_1^2}\tau_1 + 1\right) + \frac{m_2}{c_2}\ln\left(\frac{c_2}{m_2}\tau_1 + 1\right).$$

Левая часть этого равенства монотонно убывает с ростом величины λ, при $\lambda \to 0$ стремится к бесконечности, при $\lambda \to \frac{m_2}{m_1}$ стремится к нулю. Существует единственное значение λ, при котором равенство выполнено. Это значение λ не зависит от величины $\widetilde{p}$. Из соотношений (12) и (18) получаем значения скоростей в начале третьего этапа $\widetilde{v}_1$, $\widetilde{v}_2$, при которых импульс системы в конце движения равен нулю, и смещения тел за все время движения одинаковы. Скорости $\widetilde{v}_1$, $\widetilde{v}_2$ пропорциональны значению $\widetilde{p}$, однако смещения тел на третьем этапе (16), (17) не зависят от $\widetilde{p}$.

Таким образом показано, что при любом значении импульса $\widetilde{p}$ в начале третьего этапа (то есть при любых τ_1 и τ_2) импульс можно перераспределить между телами так, что через некоторое время свободного движения он станет равным нулю, и можно мгновенно остановить оба тела, причем сумма расстояний, пройденных на первом и третьем этапе, будет одинакова для обоих тел.

Найдем расстояние l, на которое должны переместиться тела на втором этапе, чтобы на всех трех этапах они прошли заданное расстояние L. При уменьшении τ_1 смещения тел на первом и третьем этапах уменьшаются ((7), (19)). Выберем такое τ_1, что сумма A смещений тел на первом и третьем этапе будет меньше, чем L. Тогда смещение l на втором этапе равно $L - A$, а длительность второго этапа определяется из формул (10), (11).

Таким образом, Задача решена. Ее решение не единственно и существует целый интервал значений $\tau_1 \in (0, \tau_{max}]$, решающих Задачу. Также, можно пропорционально уменьшить начальные скорости $v_i(0)$ и при фиксированном τ_1 получить малые сдвиги на первом и третьем этапах. Заметим, что за счет уменьшения τ_1, или за счет уменьшения скоростей тел $v_i(0)$ можно добиться того, что расстояние между телами будет сколь угодно мало на протяжении всего времени движения. Время движения T, решающее задачу, может быть сколь угодно мало за счет выбора больших скоростей тел $v_i(0)$ в начале первого этапа.

4. Заключение

Решена задача о перемещении вдоль прямой системы двух взаимодействующих тел в изотропной среде с квадратичным законом сопротивления. Предполагалось, что сила взаимодействия тел не ограничена и возможно мгновенно перераспределять импульс между телами. Показано, что можно перевести систему между двумя состояниями покоя так, что каждое из тел переместится на одинаковое заданное расстояние. В построенном движении моменты времени, в которые импульс системы перераспределяется между телами, чередуются с интервалами времени, на которых тела движутся, не взаимодействуя друг с другом. Построенное движение может быть использовано для управления системой трех и более тел, с произвольными массами и коэффициентами сопротивления. В частном случае для системы, состоящей из трех и более идентичных тел, задача о перемещении системы между двумя состояниями покоя была решена в [5].

Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (проект № 23-11-00128).

Список литературы

1. Черноусько Ф.Л. Оптимальное прямолинейное движение двухмассовой системы // ПММ. Прикладная математика и механика. 2002. Т. 66, Вып. 1. С. 3–9.
2. Черноусько Ф.Л. Анализ и оптимизация прямолинейного движения двух-массовой системы // ПММ. Прикладная математика и механика. 2011. Т. 75, Вып. 5. С. 707–717.
3. Bolotnik N., Figurina T. Optimal control of a two-body limbless crawler along a rough horizontal straight line // Nonlinear Dynamics. 2020. Vol. 102, No. 3. P. 1627–1642.
4. Bolotnik N., Pivovarov M., Zeidis I, Zimmrmann K. The motion of a two-body limbless locomotor along a straight line in a resistive medium // ZAMM. Journal of Applied Mathematics and Mechanics. 2016. Vol. 96, No. 4. P. 429–452.
5. Figurina T., Knyazkov D. Motion of a system of interacting bodies in a medium with quadratic resistance // Nonlinear Dynamics. 2024. Vol. 112. P. 273–288.