УДК 517.935.4

ТЕОРЕМА О СВЕРТЫВАНИИ ВМЕСТО S-ПРОЦЕДУРЫ: КРУГОВОЙ КРИТЕРИЙ И КРИТЕРИЙ ЦЫПКИНА

В.А. Каменецкий
Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН
Россия, 117997, Москва, Профсоюзная ул., 65
E-mail: vlakam@ipu.ru

Ключевые слова: абсолютная устойчивость, круговой критерий, критерий Цыпкина, функции Ляпунова, матричные неравенства.

Аннотация: В задаче абсолютной устойчивости систем Лурье с несколькими нелинейностями круговой критерий (для систем с непрерывным временем) и критерий Цыпкина (для систем с дискретным временем) получены с использованием теоремы о свертывании и без использования S-процедуры.

1. Введение

Изучение устойчивости систем с неопределенностью [1] во многом опирается на теорию абсолютной устойчивости [2]. Важными результатами этой теории являются круговой критерий в непрерывном случае и критерий Цыпкина в дискретном случае [2–6]. Эти критерии являются достаточными условиями существования квадратичной функции Ляпунова (КФЛ) в случае систем Лурье с несколькими нелинейностями [2]. К достаточности приводит использование специального приема – S-процедуры [7]. С другой стороны, существование КФЛ в случае нескольких нелинейностей определяется разрешимостью системы линейных матричных неравенств (ЛМН), что установлено в [8] для непрерывного случая и в [9] для дискретного случая. Для работы с системами матричных неравенств (МН) Пятницким была предложена теорема [10], в которой показывается, как получить одно МН, эквивалентное системе из двух МН. В [8] такая операция перехода от двух МН к одному названа свертыванием.

2. Постановка задачи

Система Лурье с несколькими нелинейностями в непрерывном случае имеет вид

$$\dot{x} = Ax + \sum_{j=1}^{m} b_j \varphi_j(t, \sigma_j), \quad \sigma_j = \langle c_j, x \rangle, \quad A \in \mathbb{R}^{n \times n},\ b_j, c_j \in \mathbb{R}^n, \tag{1}$$

где нелинейности $\varphi_j(t,\sigma_j)$ удовлетворяют условиям существования абсолютно непрерывного решения $x(t)$, $j=\overline{1,m}$. Абсолютная устойчивость системы (1) в классе N_φ нелинейностей $\varphi=\|\varphi_j\|_{j=1}^m$, удовлетворяющих секторным ограничениям

$$0\leqslant\varphi_j\sigma_j\leqslant\sigma_j^2,\ \ j=\overline{1,m}, \tag{2}$$

означает асимптотическую устойчивость в целом при любых таких нелинейностях.

Дискретная система Лурье с несколькими нелинейностями имеет вид

$$x(t+1)=Ax(t)+\sum_{j=1}^m b_j\varphi_j(t,\sigma_j),\quad \sigma_j=\langle c_j,x\rangle, \tag{3}$$

где $\varphi_j(t,\sigma_j)$ при всех $\sigma_j=\langle c_j,x\rangle$ и $t>0$ удовлетворяют секторным ограничениям (2). Абсолютная устойчивость системы (3) означает асимптотическую устойчивость в целом при любых таких нелинейностях.

Далее символ $\{\cdot\}^\top$ означает операцию транспонирования матриц.

Теорема 1 (о свертывании [8], [11])**.** *Для выполнения системы двух МН*

$$I_1<0,\quad I_2<0,\quad (I_2-I_1=Q=pq^\top+qp^\top,\quad p,q\in\mathbb{R}^n), \tag{4}$$

необходимо и достаточно, чтобы существовало такое число $\widetilde{\varepsilon}>0$, при котором выполнено одно МН

$$I_1+Q^+(\widetilde{\varepsilon})=I_2+Q^-(\widetilde{\varepsilon})<0,\ \ Q^\pm(\varepsilon)=\frac{\varepsilon^2}{2}u^\pm(u^\pm)^\top,\ \ u^\pm(\varepsilon)=p\pm\frac{1}{\varepsilon^2}q. \tag{5}$$

Очевидно, из выполнения МН (5) при некотором произвольном $\varepsilon>0$ следует выполнение системы (4).

Здесь в разделах 3 и 4 круговой критерий и критерий Цыпкина в случае нескольких нелинейностей получены с помощью операции свертывания и без S-процедуры.

3. Круговой критерий

Опуская подробности, скажем, что достаточным условием отрицательной определенности производной $\dot v(x)$ КФЛ $v(x)=x^\top Lx(L\in\mathbb{R}^{n\times n},\ L^\top=L)$ в силу (1) является условие разрешимости полученного с помощью S-процедуры МН

$$\begin{pmatrix} A^\top L+LA & LB+C\tau/2\\ B^\top L+\tau C^\top/2 & -\Gamma\end{pmatrix}<0, \tag{6}$$

где

$$B=\begin{pmatrix}b_1 & b_2 & \dots & b_m\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}c_1 & c_2 & \dots & c_m\end{pmatrix},\ \Gamma=\tau=\mathrm{diag}\Big\{\tau_1,\dots,\tau_m\Big\}. \tag{7}$$

$\tau_j>0$ – неопределенные параметры, $j=\overline{1,m}$. Круговой критерий для системы (1) с несколькими елинейностями состоит в проверке частотного критерия разрешимости МН (6), полученного из частотной теоремы (KYP лемма) [7], [12].

Наличие КФЛ $v(x)$ для системы (1) определяется [8] решением системы ЛМН

$$I_s=A_s^\top L+LA_s<0,\quad s=\overline{1,N}\quad (N=2^m), \tag{8}$$

с матрицами A_s следующего вида [8]:

$$A_s = A + \sum_{j=1}^{m} h_{sj} b_j c_j^\top, \quad h_s = \|h_{sj}\|_{j=1}^{m}, \quad s = \overline{1, N}, \tag{9}$$

где h_{sj} независимо принимают одно из двух значений: 0 или 1. Считаем, что $A_1 = A$.

Из представления (9) следует

$$I_s = A^\top L + LA + \sum_{j=1}^{m} h_{sj} \left(Lb_j c_j^\top + c_j b_j^\top L \right), \quad s = \overline{1, N}.$$

Для матриц $Q_j \triangleq Lb_j c_j^\top + c_j b_j^\top L$, $j = \overline{1, m}$, используем представление в виде разности $Q_j = Q_j^+ - Q_j^-$, как это делается в теореме 1. Тогда МН

$$Q_j \leqslant Q_j^+(\varepsilon_j) = \frac{\varepsilon_j^2}{2} u_j^+(\varepsilon_j) u_j^+(\varepsilon_j)^\top, \;\; u_j^+(\varepsilon_j) \triangleq Lb_j + \frac{1}{\varepsilon_j^2} c_j, \;\; j = \overline{1, m}, \tag{10}$$

выполняются при любых $\varepsilon_j > 0$. Так как $h_{sj} = 0$ или $h_{sj} = 1$, то

$$I_s \leqslant I_{\text{cir}} \triangleq A^\top L + LA + \sum_{j=1}^{m} Q_j^+(\varepsilon_j), \;\; s = \overline{1, N}.$$

Переобозначая в (10) дополнительные переменные $\tau_j \triangleq 2/\varepsilon_j^2$, из леммы Шура получим, что МН $I_{\text{cir}} < 0$ эквивалентно МН (6). Таким образом, круговой критерий получен без использования S-процедуры.

Собственно, необходимость из теоремы 1 нужна только при $m = 1$, чтобы показать, что в этом случае система (8) и МН $I_{\text{cir}} < 0$ эквивалентны.

4. Критерий Цыпкина

Достаточным условием отрицательной определенности первой разности $\triangle v(x(t)) = x^\top(t+1) L x(t+1) - x^\top(t) L x(t)$ КФЛ $v(x) = x^\top L x$ вдоль решений системы (3) является условие разрешимости полученного с помощью S-процедуры МН

$$I_{Ts}^m = \begin{pmatrix} A^\top LA - L & A^\top LB + C\tau/2 \\ B^\top LA + \tau C^\top/2 & B^\top LB - \Gamma \end{pmatrix} < 0, \tag{11}$$

где B, C, Γ, τ имеют тот же вид, что и в (6), $\tau_j > 0$ – неопределенные параметры. Критерием Цыпкина для системы (3) является частотный критерий разрешимости МН (11), полученный из обобщенной леммы Калмана-Сеге-Попова [5], [6].

Наличие КФЛ $v(x)$ для системы (3) при (2) определяется [9] разрешимостью следующей системы ЛМН (матрицы A_s определяются соотношением (9)):

$$I_s = A_s^\top L A_s - L < 0, \quad s = 1, \ldots, N \quad (N = 2^m), \tag{12}$$

Дискретный случай гораздо сложнее непрерывного, поскольку МН в (12) зависят от A_s квадратично, а в непрерывном случае эта зависимость линейна.

Теорема 2. *Из разрешимости МН* (11) *при некоторых дополнительных параметрах* $\tau = \mathrm{diag}\Big\{\tau_1, \ldots, \tau_m\Big\}$, $\tau_j > 0$, *следует разрешимость системы* (12).

Доказательство теоремы 2. Требуется получить утверждение теоремы 2 с помощью теоремы 1 без использования S-процедуры. В случае $m = 1$ такой результат получен в [13], в случае $m = 2$ – в [14].

По предположению индукции будем считать, что достаточным условием разрешимости системы (12) является разрешимость МН (11). При увеличении количества нелинейностей в системе (3) на единицу, количество неравенств в системе (12) увеличится в два раза, т.е. при $N = 2^{m+1}$ систему (12) можно представить в виде

$$A_s^\top L A_s - L < 0, \quad s = 1, \ldots, 2^m, \tag{13}$$

$$A_s^\top L A_s - L < 0, \quad s = 2^m + 1, \ldots, 2^{m+1}. \tag{14}$$

Будем считать, что система (13) в точности совпадает с (12), а матрицы A_s в системе (14) пронумерованы таким образом, что $A_{s+2^m} = A_s + b_{m+1}c_{m+1}^\top$, $s = 1, \ldots, 2^m$. Таким образом, система (14) совпадает с (13), если в системе (13) в выражениях для матриц A_s матрицу A заменить на $A_{1+2^m} = A + b_{m+1}c_{m+1}^\top$. Для удобства обозначим $1 + 2^m \triangleq \xi$, т.е. $A_\xi = A_{1+2^m}$. Следовательно, по предположению индукции достаточным условием разрешимости системы (14) является разрешимость МН

$$\widehat{I}_{Ts}^m = \begin{pmatrix} A_\xi^\top L A_\xi - L & A_\xi^\top L B + C\tau/2 \\ B^\top L A_\xi + \tau C^\top/2 & B^\top L B - \Gamma \end{pmatrix} < 0, \tag{15}$$

где B и C те же, что и в (11). Рассмотрим разницу $\widehat{I}_{Ts}^m - I_{Ts}^m$, считая значения дополнительных параметров τ одинаковыми в обеих матрицах:

$$\widehat{I}_{Ts}^m - I_{Ts}^m = \begin{pmatrix} A_\xi^\top L A_\xi - A^\top L A & c_{m+1}b_{m+1}^\top L B \\ B^\top L b_{m+1} c_{m+1}^\top & 0_{m\times m} \end{pmatrix},$$

где $0_{n\times m}$ – это матрица размера $n \times m$, все элементы которой равны 0. Поскольку $A_\xi^\top L A_\xi - A^\top L A = p_{m+1}c_{m+1}^\top + c_{m+1}p_{m+1}^\top$, где $p_{m+1} = A^\top L b_{m+1} + (b_{m+1}^\top L b_{m+1}/2)c_{m+1}$, то проверяется непосредственно, что

$$\widehat{I}_{Ts}^m - I_{Ts}^m = \widetilde{p}\,\widetilde{q}^\top + \widetilde{q}\,\widetilde{p}^\top, \ \ \widetilde{p} = \begin{pmatrix} p_{m+1} \\ B^\top L b_{m+1} \end{pmatrix}, \ \ \widetilde{q} = \begin{pmatrix} c_{m+1} \\ 0_{m\times 1} \end{pmatrix},$$

т.е. к системе из двух МН (11) и (15) применима теорема 1, на основании которой получим, что разрешимость этой системы эквивалентна существованию такого $\varepsilon_{m+1} > 0$, что разрешимо одно МН

$$I_{Ts}^{m+1} = I_{Ts}^m + \frac{\varepsilon_{m+1}^2}{2}\left(\widetilde{p} + \frac{1}{\varepsilon_{m+1}^2}\,\widetilde{q}\right)\left(\widetilde{p} + \frac{1}{\varepsilon_{m+1}^2}\,\widetilde{q}\right)^\top < 0. \tag{16}$$

Определим $\tau_{m+1} \triangleq b_{m+1}^\top L b_{m+1} + (2/\varepsilon_{m+1}^2)$, тогда

$$\widetilde{p} + (1/\varepsilon_{m+1}^2)\,\widetilde{q} = \begin{pmatrix} p_{m+1} + (1/\varepsilon_{m+1}^2)\,c_{m+1} \\ B^\top L b_{m+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^\top L b_{m+1} + (\tau_{m+1}/2)c_{m+1} \\ B^\top L b_{m+1} \end{pmatrix}.$$

По лемме Шура МН (16) эквивалентно следующему МН в пространстве $\mathbb{R}^{n+m+1}$:

$$I_{Ts}^{m+1} \cong \widetilde{I}_{Ts}^{m+1} = \begin{pmatrix} I_{Ts}^{m} & \widetilde{p} + (1/\varepsilon_{m+1}^2)\,\widetilde{q} \\ (\bullet)^\top & -2/\varepsilon_{m+1}^2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} A^\top LA - L & A^\top LB_{m+1} + C_{m+1}\tau_{m+1}/2 \\ (\bullet)^\top & B_{m+1}^\top LB_{m+1} - \Gamma_{m+1} \end{pmatrix} < 0.$$

где $B_{m+1} = \big(b_1\, b_2\, \dots\, b_m\, b_{m+1}\big)$, $C_{m+1} = \big(c_1\, c_2\, \dots\, c_m\, c_{m+1}\big)$, $\Gamma_{m+1} = \tau_{m+1} = \mathrm{diag}\big\{\tau_1, \dots, \tau_m, \tau_{m+1}\big\}$. Символы “ $\bullet$” обозначают элементы под главной диагональю симметрической матрицы, совпадающие с соответствующими элементами над главной диагональю.

Таким образом, МН $\widetilde{I}_{Ts}^{m+1} < 0$ приведено к виду МН (12) для системы с $m+1$ нелинейностью. Теорема 2 доказана.

Список литературы

1. Поляк Б.Т., Хлебников М.В., Щербаков П.С. Линейные матричные неравенства в системах управления с неопределенностью // Автоматика и телемеханика. 2021. № 1. С. 3–54.
2. Fradkov A. Early Ideas of the Absolute Stability Theory // 2020 European Control Conference (ECC), May 12–15, 2020. Saint Petersburg, Russia. P. 762–768.
3. Якубович В.А. Частотные условия абсолютной устойчивости систем управления с несколькими нелинейными или линейными нестационарными блоками // Автоматика и телемеханика. 1967. № 6. С. 5–30.
4. Якубович В.А. Абсолютная неустойчивость нелинейных систем управления. II. Системы с нестационарными нелинейностями. Круговой критерий // Автоматика и телемеханика. 1971. № 6. С. 25–34.
5. Якубович В.А. Абсолютная устойчивость импульсных систем с несколькими нелинейными или линейными нестационарными блоками. I, II // Автоматика и телемеханика. 1967. № 9. С. 59–72; 1968. № 2. С. 81–101.
6. Шепелявый А.И. Абсолютная неустойчивость нелинейных амплитудно -импульсных систем управления. Частотные критерии // Автоматика и телемеханика. 1972. № 6. 49–56.
7. Гусев С.В., Лихтарников А.Л. Очерк истории леммы Калмана-Попова-Якубовича и S-процедуры // Автоматика и телемеханика. 2006. №10. С. 77–121.
8. Каменецкий В.А. Абсолютная устойчивость и абсолютная неустойчивость систем управления с несколькими нелинейными нестационарными элементами // Автоматика и телемеханика. 1983. № 12. С. 20–30.
9. Каменецкий В.А. Абсолютная устойчивость дискретных систем управления с нестационарными нелинейностями // Автоматика и телемеханика. 1985. № 8. С. 172–176.
10. Скородинский В.И. Абсолютная устойчивость и абсолютная неустойчивость систем управления с двумя нелинейными нестационарными элементами. I // Автоматика и телемеханика. 1981. № 9. С. 21–29.
11. Каменецкий В.А. Частотные условия устойчивости гибридных систем // Автоматика и телемеханика. 2017. № 12. С. 3–25.
12. Гелиг А.Х., Леонов Г.А., Якубович В.А. Устойчивость нелинейных систем с неединственным состоянием равновесия. М.: Наука, 1978.
13. Каменецкий В.А. Частотные условия устойчивости дискретных систем с переключениями // Автоматика и телемеханика. 2018. № 8. С. 3–26.
14. Каменецкий В.А. Дискретные попарно связные системы с переключениями и системы Лурье, критерий Цыпкина для систем с двумя нелинейностями // АиТ. 2022. № 9. С. 55–80.