

# ДЕМПФИРОВАНИЕ УПРУГИХ КОЛЕБАНИЙ В СИСТЕМЕ УПРАВЛЕНИЯ ГРАЖДАНСКИМ ЛЕТАТЕЛЬНЫМ АППАРАТОМ

**С.В. Ромадов**

*Тульский государственный университет*  
Россия, 300012, Тула, Ленина просп., 92  
E-mail: romadovsergey5@gmail.com

**А.В. Козырь**

*Тульский государственный университет*  
Россия, 300012, Тула, Ленина просп., 92  
E-mail: Kozyr\_A\_V@mail.ru

**Ключевые слова:** упругие колебания, модальное управление, летательный аппарат, линеаризация, модель Эйлера-Бернулли.

**Аннотация:** Задача управления движением гибкой конструкцией возникает в различных приложениях робототехники и мехатроники. Упругое поведение гибких звеньев приводит к нежелательным вибрациям, что затрудняет разработку системы управления такими системами. В данной работе решается проблема построения эффективной с вычислительной точки зрения математической модели упругого летательного аппарата, которая может использоваться для синтеза системы управления. С данной целью комбинируются классические подходы к описанию малых колебаний и движения летательного аппарата. Предлагается вариант коррекции системы в условиях параметрической неопределенности для преодоления неточности математической модели, возникающей из-за несовершенства математических моделей упругих колебаний. Это позволяет использовать линейное математическое описание системы с нежесткостью, удобной для анализа и синтеза системы управления.

## 1. Введение

Нежесткие системы используются во все более широких масштабах для облегчения конструкций и повышения энергоэффективности систем [1] в космосе, медицине, под водой и при проведении быстрых операций [2]. Притом наибольшую сложность и актуальность задача обретает именно в управлении летательными аппаратами, для которых характерны две основные причины возникновения упругих колебаний: недостаточная жесткость конструкции и влияние аэродинамических сил. Для новых материалов и вариантов планера использование механических демпферов зачастую не являются достаточно эффективными, а для традиционных новые подходы позволяют повысить точность выполнения полетного задания и облегчить конструкцию [3].

Существующие модели с высокой точностью могут моделировать явления аэроупругости [4], но они требуют больших вычислительных ресурсов. Широко используются модели средней точности, такие как панельные методы или методы дублетной решетки, притом разработка математической модели упругого летательного аппарата пониженного порядка, пригодной для синтеза системы управления, остается

актуальной задачей. С ней связана задача разработки методов идентификации параметров таких систем, позволяющих избежать упрощающих предположений, заложенных в некоторые аналитические модели. Такими методами могут послужить алгоритм ERA и методы квазилинейного изменения параметров [5]. Современные подходы включают применение аэродинамического моделирования пониженного порядка, основанного на нейронных сетях и моделях нечеткой логики [6]. Требуется разработка и процедура синтеза системы управления для летательных аппаратов (ЛА), представляющих собой сложные системы с множеством входов и выходов (ММО-системы). Имеющиеся подходы [7-8] необходимо распространить на упругие системы.

В данной работе будет использован классический подход к моделированию упругих колебаний, находящий применение при условии низких углов отклонения – модель Эйлера-Бернулли [9, 10]. Неточность модели и экспериментальный характер параметров требует внимательного подхода к синтезу системы управления, которая должна обладать свойством робастности. Будет рассмотрен метод модального синтеза на основе линейных матричных неравенств (LMI) [11, 12].

## 2. Математическая модель описания упругих колебаний

Описание упругих колебаний основывается на применении дифференциального уравнения Эйлера-Бернулли с учетом напряжений сдвига и инерции вращения сечений:

$$(1) \quad \left(1 + h \frac{\partial}{\partial t}\right) \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( E J_z(x) \frac{\partial^2 f(x,t)}{\partial x^2} \right) + m_0(x) \frac{\partial^2 f(x,t)}{\partial t^2} + \frac{m_0(x) I_{0z}(x)}{kGA(x)} \frac{\partial^4 f(x,t)}{\partial t^4} - \frac{\partial^2 f(x,t)}{\partial x^2} \left( \left( I_{0z}(x) + m_0(x) \frac{E J_z(x)}{kGA(x)} \right) \frac{\partial^2 f(x,t)}{\partial t^2} \right) = 0,$$

где  $h$  – коэффициент внутреннего трения [1], с;  $x$  – координата точки на продольной оси, м;  $E$  – модуль упругости первого рода, Па;  $J_z(x)$  – момент инерции сечения, м<sup>4</sup>;  $f(x, t)$  – прогиб, м;  $m_0(x)$  – распределенная масса, кг/м;  $I_{0z}(x)$  – момент инерции сечения единичной длины относительно поперечной оси, проходящей через центр тяжести тела, кг·м<sup>2</sup>;  $k$  – коэффициент распределения касательных напряжений по сечению;  $G$  – модуль упругости второго рода, Па;  $A(x)$  – площадь сечения, м<sup>2</sup>.

После разделения прогиба в (1) на составляющие, одна из которых зависит только от времени, другая – только от координаты, он представляется в виде бесконечного ряда их произведений, каждому из которых соответствует собственная частота:

$$(2) \quad f(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \phi_n(x) q_n(t),$$

где  $\phi_n(x)$  –  $n$ -ая главная форма колебаний, м;  $q_n(t)$  – обобщенная координата деформации по  $n$ -ой форме.

Уравнение (1) после подстановки (2) может быть использовано для аналитического вычисления главных форм колебаний. При этом законы распределения всех распределенных по длине величин для простоты представляют ступенчатыми и рассматривают в уравнении (1) все такие величины как постоянные [9].

Сами же законы распределения строятся следующим образом: тело делится на несколько участков, и для каждого участка рассчитываются моменты инерции  $J_z$  и площади  $A$  поперечных сечений, распределенная масса  $m_0$  и момент инерции участка относительно центра тяжести  $I_{0z}$ . При этом величины  $J_z$  и  $A$  рассчитываются для сечения корпуса (оболочки) ЛА,  $m_0$  для всего участка, а при расчете  $I_{0z}$  используется только масса корпуса (оболочки). Так, для некоторого  $i$ -ого участка можно записать

$$I_{0z,i} = \frac{J_{z,i} m_{об,i}}{A_i},$$

где  $m_{об,i}$  – масса корпуса (оболочки) на  $i$ -ом участке, кг.

### 3. Математическая модель движения летательного аппарата

В качестве примера приведем методику синтеза системы управления в продольном движении ЛА. При пренебрежении силой лобового сопротивления рулей нелинейная система уравнений исследуемой системы в скоростной системе координат [9]:

$$\begin{aligned} m \frac{dV}{dt} &= T \cos(\alpha(x_{дв})) - C_F^\delta \frac{\rho V^2}{2} S_p \sin(\alpha(x_p)) \delta - C_x \frac{\rho V^2}{2} S - mg \sin \psi; \\ m \frac{d\psi}{dt} V &= T \sin(\alpha(x_{дв})) + C_F^\delta \frac{\rho V^2}{2} S_p \cos(\alpha(x_p)) \delta + C_y \frac{\rho V^2}{2} S - mg \cos \psi; \\ I_z \frac{d^2 \theta}{dt^2} &= -m_z \frac{\rho V^2}{2} S b + \sum_{n=1}^N \left( \int_0^l m_0(x) (x - x_{цм}) \phi_n(x) dx \right) \frac{d^2 q_n}{dt^2} + \\ &+ C_F^\delta \frac{\rho V^2}{2} S_p (x_p - x_{цм}) \cos(\alpha(x_p)) \delta - T (x_{дв} - x_{цм}) \sin(\alpha(x_{дв})); \\ \left( \int_0^l m_0(x) \phi^2(x) dx \right) \frac{d^2 q_n}{dt^2} &= - \left( \int_0^l m_0(x) (x - x_{цм}) \phi_n(x) dx \right) \frac{d^2 \theta}{dt^2} - \\ &- h \omega_n^2 \frac{dq_n}{dt} - \omega_n^2 q_n + C_F^\delta \frac{\rho V^2}{2} S_p \phi_n(x_p) \delta, \end{aligned}$$

где  $m$  – масса ЛА, кг;  $V$  – скорость ЛА, м/с;  $T$  – сила тяги, Н;  $\alpha(x)$  – угол атаки, рад;  $x_{дв}$  – координата точки приложения силы тяги, м;  $C_F^\delta$  – производная коэффициента подъемной силы рулей по углу поворота руля;  $\rho$  – плотность воздуха, кг/м<sup>3</sup>;  $x_p$  – координата точки приложения силы рулей, м;  $\delta$  – угол поворота рулей, рад;  $C_x$  – коэффициент силы лобового сопротивления;  $S$ ,  $S_p$  – характерные площади ЛА и руля, м<sup>2</sup>;  $g$  – ускорение свободного падения, м/с<sup>2</sup>;  $\psi$  – угол поворота траектории ЛА, рад;  $C_y$  – коэффициент подъемной силы;  $I_z$  – момент инерции относительно оси тангажа, кг·м<sup>2</sup>;  $\theta$  – угол тангажа, рад;  $m_z$  – коэффициент стабилизирующего момента тангажа;  $b$  – хорда крыла, м;  $x_{цм}$  – координата центра масс, м;  $l$  – длина ЛА, м;  $\omega_n$  – собственная частота колебаний по  $n$ -й форме, рад/с. Условно показано уравнение только для одной обобщенной координаты деформации по  $n$ -ой форме колебаний. Угол атаки в произвольной точке равен

$$\alpha(x) = \theta - \psi + \sum_{n=1}^N \frac{d\phi_n(x)}{dx} q_n,$$

где  $N$  – число учтенных форм колебаний.

В линеаризованной системе, уравнения которой не приводятся для краткости, каждая переменная состояния будет зависеть от прогиба в данном сечении, при этом вектор состояния может быть сформулирован в виде

$$\mathbf{x} = \left( V \quad \theta \quad \psi \quad \frac{d\psi}{dt} \quad q_1 \quad \frac{dq_1}{dt} \quad \dots \quad q_N \quad \frac{dq_N}{dt} \right).$$

### 4. Синтез системы управления

Синтез регулятора осуществляется в форме обратной связи по переменным состояния:

$$u = -\mathbf{K}\mathbf{x},$$

где ( $u = \delta$ ) – угол поворота рулей, рад;  $\mathbf{K}$  – вектор коэффициентов обратной связи.

Метод LMI позволяет задать желаемые значения собственных чисел матрицы системы с помощью LMI-областей, определяемых симметричными матрицами  $\mathbf{L}$  и  $\mathbf{M}$  [11]:

$$\mathbf{L} \otimes \mathbf{P} + \mathbf{M} \otimes (\mathbf{A}\mathbf{P} + \mathbf{B}\mathbf{Y}) + \mathbf{M}^T \otimes (\mathbf{P}\mathbf{A}^T + \mathbf{Y}^T\mathbf{B}^T) < 0,$$

где « $\otimes$ » обозначает произведение Кронекера;  $\mathbf{P}$ ,  $\mathbf{Y}$  – положительно определенные матрицы, определяемые решением системы и определяющие коэффициенты обратной связи

$$\mathbf{K} = \mathbf{Y}\mathbf{P}^{-1}.$$

Желаемое расположение корней системы задавалось комбинацией двух областей – вертикальной полосы от  $\xi$  до  $\eta$  и конического сектора с углом наклона  $\varphi$ . Параметр  $\eta$  в таком случае определяет быстродействие;  $\xi$  – ограничение быстрых составляющих переходных процессов;  $\varphi$  – коэффициент демпфирования.

Особенно примечательным метод LMI делают возможности ограничения управляющего воздействия или его минимизации [11] и возможность реализации робастного управления для неопределенных систем, которое также может быть реализовано в форме интуитивно понятного модального управления [12], описанного выше для системы с известными параметрами.

Параметры тестовой системы были выбраны произвольно. ЛА был разбит на три участка с разными длинами, формами сечений и массами. Переходные процессы в исходной и скорректированной системах показаны на рис. 1.

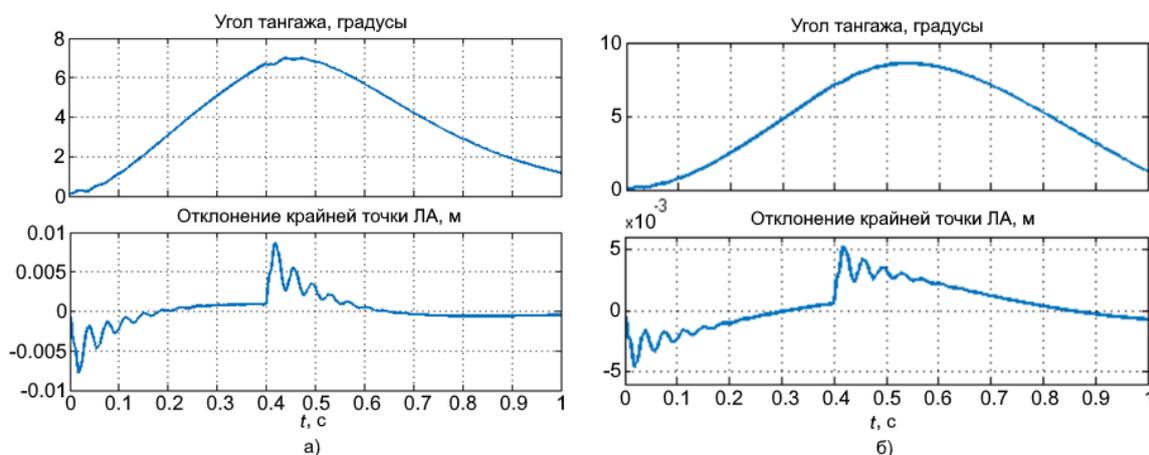


Рис. 1. Переходные процессы в исходной (а) и скорректированной (б) системах.

Использование подхода к синтезу регулятора на основе LMI позволило добиться снижения максимального прогиба на 60% в сравнении с исходной системой. При этом можно добиваться разного характера переходных процессов с помощью разного задания LMI-областей. Очевидно, что для практического учета форм колебаний в обратной связи необходим синтез наблюдателя.

## 5. Заключение

Следующий этап работы будет заключаться в исследовании возможности идентификации параметров математических моделей упругих систем. Проводимые в данный момент вычисления законов распределения массы и изгибной жесткости с помощью анализируемых в специализированном ПО точных моделей с заданными геометрическими размерами и характеристиками материалов, не только занимают много времени, но и принципиально не могут предоставить действительно точные результаты. Получаемые таким образом параметры математических моделей тем не менее могут послужить ориентировочными для оценки адекватности результатов, которые будут получены в ходе экспериментальных исследований.

При этом сама модель, используемая для описания упругих колебаний, также нуждается в уточнении и комплексном сравнении с иными подходами, основанными на разных предположениях и допущениях, линейных и нелинейных математических моделях.

Исследование выполнено при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования РФ в рамках государственного задания по теме «FEWG-2022-0003»

## Список литературы

1. Rahimi H.N., Nazemizadeh M. Dynamic analysis and intelligent control techniques for flexible manipulators: A review // *Advanced Robotics*. 2014. No. 28 (2). P. 63-76.
2. Zhao Z., Liu Z. Finite-time convergence disturbance rejection control for a flexible Timoshenko manipulator // *IEEE/CAA Journal of Automatica Sinica*. 2021. No. 8 (1). P. 157-168.
3. Dowell E.H. A modern course in aeroelasticity / 5th revised and enlarged ed. Springer, 2015. 720 p.
4. Peskin S.C. The immersed boundary method // *Acta Numerica*. 2002. Vol. 11. P. 479-517.
5. Hickner M., Fasel U., Nair A.G., Brunton B.W., Brunton S.L. Data-driven unsteady aeroelastic modeling for control // *ARC*, 2022. No. 5 (61). P. 1-14.
6. Андриевский Б.Р., Кузнецов Н.В., Кудряшова Е.В., Кузнецова О.А. Крутильно-изгибный флаттер крыла: математические модели, исследование и предотвращение. Обзор // *Дифференциальные уравнения и процессы управления*. 2021. № 4. С. 116-191.
7. Stevens B.L., Lewis F.L., Johnson E.N. Aircraft control and simulation. John Wiley & Sons, 2015. 764 p.
8. Huang R., Hu H., Zhao Y. Nonlinear Reduced-Order Modeling for Multiple-Input/Multiple-Output Aerodynamic Systems // *AIAA Journal*. 2014. Vol. 52, No. 6. P. 1219-1231.
9. Авраменко А.А. Метод Рэлея - Ритца и метод начальных параметров в задаче расчета динамических характеристик составных упругих конструкций балочного типа // *Вестник Самарского университета. Серия естествознания*. 2019. № 1. С. 44-56.
10. Zhang C., Zhou Z., Zhu X., Qiao L. A Comprehensive Framework for Coupled Nonlinear Aeroelasticity and Flight Dynamics of Highly Flexible Aircrafts // *Applied Sciences*. 2020. Vol. 10, No. 3. P. 949-973.
11. Baillieul J., Samad T. Encyclopedia of Systems and Control. London: Springer, 2015. 1569 p.
12. Fazzolari H.A., Ferreira P.A.V. Robust Stability and Pole Placement: An Application of Parametric Interval Analysis // *Journal of Control, Automation and Electrical Systems*. 2021. Vol. 32. P. 1498-1509.