

УДК (62-50)

# О РОБАСТНОМ ТРАПЕЦИЕВИДНОМ УПРАВЛЕНИИ, ПРЕДОТВРАЩАЮЩЕМ НЕЖЕЛАТЕЛЬНЫЕ ВИБРАЦИИ

**А.М. Формальский**

*Институт механики МГУ им. М.В. Ломоносова*  
Россия, 119192, Москва, Мичуринский проспект, дом 1  
E-mail: formal@imec.msu.ru

**Ю.Д. Селюцкий**

*Институт механики МГУ им. М.В. Ломоносова*  
Россия, 119192, Москва, Мичуринский проспект, дом 1  
E-mail: seliutski@imec.msu.ru

**Ключевые слова:** управляемая система, робастность, трапециевидное управление, нежелательные вибрации.

**Аннотация:** Рассматривается механическая система с двумя степенями свободы, содержащая два абсолютно твердых тела. Тела соединены между собой невесомым прямолинейным вязкоупругим стержнем, который может растягиваться или сжиматься. Каждое из тел может перемещаться поступательно вдоль неподвижной прямой, на которой располагается стержень. К одному из тел прикладывается ограниченная по абсолютной величине управляющая сила, вектор которой направлен вдоль стержня. Построено непрерывное во времени *кусочно-линейное (трапециевидное)* управление, которое переводит систему из одного положения равновесия в другое за время, близкое к минимально возможному. Построенное управление является робастным, оно позволяет также избежать возникновения нежелательных вибраций в системе.

## 1. Введение

Изучаемая система состоит из двух материальных точек, соединенных вязкоупругим стержнем. Она описывается системой линейных стационарных дифференциальных уравнений. Оптимальное по быстродействию ограниченное управление такой системой представляет собой, как известно [1–3], *разрывную* функцию времени (bang-bang control). Система, содержащая две материальные точки, исследуется в ряде публикаций (см., например, [4–8]). Среди них есть работы, в которых строится оптимальное по времени управление [4], управление, при котором в системе не возбуждаются нежелательные колебания или минимизируется их амплитуда [5]. В [7, 8] построено ограниченное управление системой с двукратным нулевым собственным значением и парой чисто мнимых.

В известной монографии [9] рассматриваются общие проблемы управления колебательными процессами, разработаны методы синтеза оптимального управления ими, в том числе приближенные.

Изучаемая здесь задача представляет интерес с точки зрения проблем управления космическими аппаратами, роботами-манипуляторами, конструкция которых обладает податливостью и которые должны маневрировать как можно быстрее и без значительных структурных вибраций во время маневров и/или после них [5].

## 2. Уравнения движения. Постановка задачи

На рис. 1 показана схема изучаемой здесь механической системы с двумя степенями свободы.

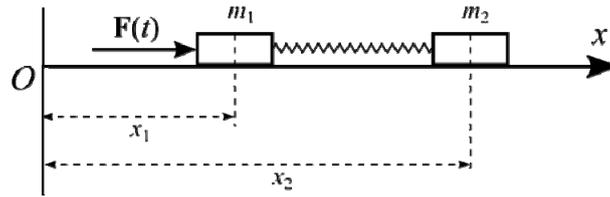


Рис. 1. Схема рассматриваемой механической системы.

Вдоль оси координат  $Ox$  могут перемещаться два абсолютно твердых тела массы  $m_1$  и  $m_2$ , соединенные вязкоупругим невесомым стержнем, длина которого в нейтральном положении:  $l$ , коэффициенты вязкости:  $d$ , жесткости:  $k$ . На рис. 1 стержень изображен в виде пружины. Допустимая управляющая сила описывается кусочно-непрерывной функцией  $F(t)$ , где  $|F(t)| \leq F_0$ ,  $F_0 = const$ . Ниже будем использовать безразмерное управление:  $u(\tau) = F(\tau)/F_0$ , где  $|u(\tau)| \leq u_0$  и  $u_0 = 1$ .

Опустив уравнения движения рассматриваемой системы в исходных переменных, запишем их сразу в безразмерных «нормальных» [10] координатах  $\eta_1, \eta_2$ :

$$\eta_1'' = u, \quad \eta_2'' + c_1 \eta_2' + c_2 \eta_2 = u, \quad |u| \leq 1 \quad (2.1)$$

Здесь  $c_1, c_2$  – безразмерные комбинации параметров системы. Штрих в уравнениях (2.1) означает однократное, а два штриха – двукратное дифференцирование по безразмерному времени  $\tau$ . Переменная  $\eta_1$ , с точностью до постоянного множителя, определяет положение центра масс исходной системы (2.1), а переменная  $\eta_2$  – расстояние между двумя телами этой системы.

Уравнения (2.1) имеют четыре собственных значения:  $\lambda_{1,2} = 0$  и  $\lambda_{3,4} = -c_1/2 \pm \sqrt{c_1^2/4 - c_2}$ . Таким образом, среди этих значений есть пара нулевых. В зависимости от знака подкоренного выражения, два других собственных значения могут быть действительными отрицательными, либо комплексно-сопряженными с отрицательной или нулевой действительной частью (чисто мнимыми):  $\lambda_{3,4} = -\varepsilon \pm i\omega$ ,  $\varepsilon \geq 0$ . Если коэффициент вязкости  $d = 0$ , то  $c_1 = 0$ . При этом  $\varepsilon = 0$  и  $\lambda_{3,4} = \pm i\omega = \pm i\sqrt{c_2}$ .

Задачу синтеза управления поставим следующим образом. Пусть при  $\tau \leq 0$  имеет место тождество  $u(\tau) \equiv 0$  и система (2.1) находится в равновесии:

$$\eta_1(\tau) \equiv 0, \quad \eta_1'(\tau) \equiv 0, \quad \eta_2(\tau) \equiv 0, \quad \eta_2'(\tau) \equiv 0. \quad (2.2)$$

Требуется найти допустимое управление  $|u(\tau)| \leq 1$ , которое к заданному моменту времени  $\theta$  переводит систему (2.1) из равновесия (2.2) в равновесие (2.3)

$$\eta_1(\theta) = \eta_{1g}, \quad \eta_1'(\theta) = 0, \quad \eta_2(\theta) = 0, \quad \eta_2'(\theta) = 0, \quad (2.3)$$

где расстояние  $\eta_{1g} > 0$  – заданная постоянная величина.

### 3. Синтез трапециевидного управления

Рассмотрим сначала движение только центра масс системы. Пусть для первого из уравнений (2.1) начальные (при  $\tau=0$ ) условия имеют вид  $\eta_1(0) = \eta_1'(0) = 0$ , а желаемые конечные (при  $\tau=\theta$ ) условия –  $\eta_1(\theta) = \eta_{1g} = \text{const} > 0$ ,  $\eta_1'(\theta) = 0$ , где  $\eta_{1g}$  – заданная величина. Оптимальным по быстродействию управлением по переменной  $\eta_1$  является [1–3] релейное с тремя переключениями (разрывами): в начале процесса – при  $\tau=0$ , в середине – при  $\tau=\theta/2$ , и в конце – при  $\tau=\theta$ :

$$u(\tau) = \begin{cases} 0 & \text{при } \tau < 0, \\ u_0 & \text{при } 0 \leq \tau \leq \theta/2, \\ -u_0 & \text{при } \theta/2 < \tau \leq \theta, \\ 0 & \text{при } \tau > \theta. \end{cases} \quad (3.1)$$

При  $u_0 = 1$  минимальное время переходного процесса  $\theta_{\min} = 2\sqrt{\eta_{1g}}$ .

Второе из уравнений (2.1) при  $d=0$  имеет вид:

$$\eta_2'' + \omega^2 \eta_2 = u(\tau). \quad (3.2)$$

Нетрудно убедиться в том, что после разрыва управления (3.1) в точке  $\tau=0$  в решении уравнения (3.2) возникают колебания (вибрации), с периодом  $\vartheta = 2\pi/\omega$ . Для того, чтобы избежать этих нежелательных колебаний, «ликвидируем» разрыв в управлении (3.1) при  $\tau=0$ , заменив его *непрерывной кусочно-линейной* функцией:

$$u(\tau) = \begin{cases} 0 & \text{при } \tau \leq 0, \\ \frac{u_0}{\vartheta} \tau & \text{при } 0 \leq \tau \leq \vartheta, \\ u_0 & \text{при } \tau \geq \vartheta. \end{cases} \quad (3.3)$$

Решение уравнения (3.2) при управлении (3.3) имеет вид:

$$\eta_2(\tau) = \begin{cases} 0 & \text{при } \tau \leq 0, \\ \frac{u_0}{\omega^2 \vartheta} \left( \tau - \frac{\sin \omega \tau}{\omega} \right) & \text{при } 0 \leq \tau \leq \vartheta, \\ \frac{u_0}{\omega^2} & \text{при } \tau \geq \vartheta. \end{cases} \quad \eta_2'(\tau) = \begin{cases} 0 & \text{при } \tau \leq 0, \\ \frac{u_0}{\omega^2 \vartheta} (1 - \cos \omega \tau) & \text{при } 0 \leq \tau \leq \vartheta, \\ 0 & \text{при } \tau \geq \vartheta. \end{cases} \quad (3.4)$$

На интервале  $0 < \tau < \vartheta$  производная  $\eta_2'(\tau) > 0$  (см. (3.4)), поэтому решение  $\eta_2(\tau)$  на этом интервале строго монотонно возрастает. При  $\tau \geq \vartheta$  управляющий сигнал  $u(\tau) = u_0$  (см. (3.3)). Тогда и решение  $\eta_2(\tau)$  при  $\tau \geq \vartheta$  остается постоянным:  $\eta_2(\tau) = u_0/\omega^2$ . Из выражений (3.4) вытекает, что при управлении (3.3) какие-либо колебания переменной  $\eta_2$  *не возникают*.

Из приведенных выше рассуждений следует, что если в оптимальном по времени релейном управлении (3.1) *заменить* все три переключения (разрывы) участками, на которых сигнал управления возрастает либо убывает линейно во времени, то в системе не возникают какие-либо вибрации. Получаемое при такой замене кусочно-линейное трапециевидное управление показано на рис. 2:

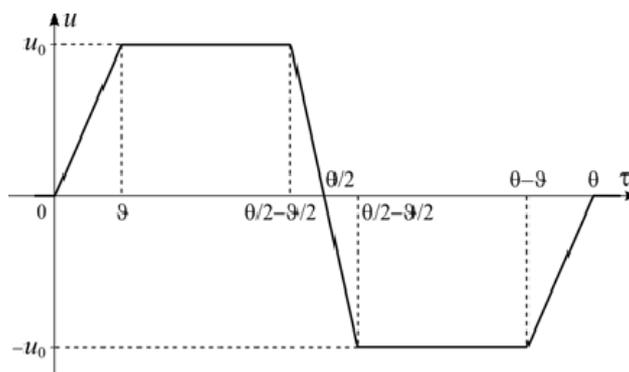


Рис. 2. Трапециевидное управление.

#### 4. Численное моделирование

Для иллюстрации эффективности предложенного алгоритма управления проведено численное моделирование в предположении, что центр масс требуется переместить на расстояние  $\eta_{1g} = 20$ . На рис. 3 показаны зависимости положений тел от времени при оптимальном (пунктирные линии) и трапециевидном (сплошные линии) управлении. Видно, что в последнем случае колебания практически отсутствуют.

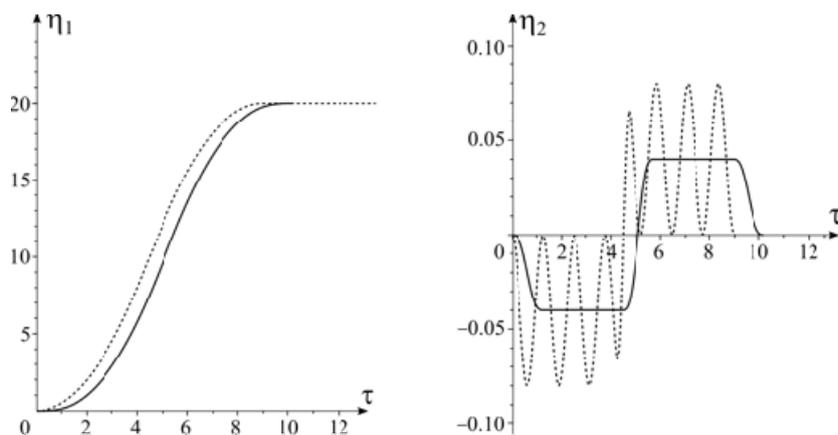


Рис. 3. Зависимости координат тел от времени.

Известно [4], что оптимальное управление не является робастным по отношению к изменению параметров системы (в частности, оно чувствительно к неточности определения собственной частоты). На рис. 4 представлена амплитуда относительных колебаний точек в зависимости от фактического значения частоты для случая, когда ошибка в определении частоты составляет 10%. Сплошная линия отвечает трапециевидному управлению, а пунктирная — оптимальному.

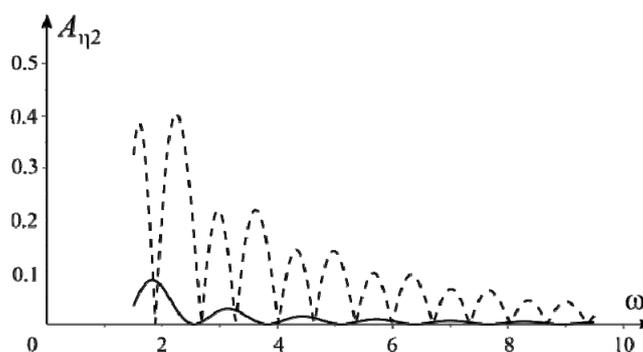


Рис. 4. Зависимость амплитуды относительных колебаний от частоты.

Как видно из этого рисунка, амплитуда относительных колебаний при трапециевидном управлении существенно меньше, чем при оптимальном (за исключением достаточно узких окрестностей дискретного набора частот).

## 4. Заключение

Оптимальное по быстродействию управление, вообще говоря, разрывное, не является робастным, поскольку при неточном знании параметров системы его использование может привести к неприемлемо большим отклонениям движения системы от желаемого. В настоящей работе путем модификации оптимального построено в виде *непрерывной* функции времени так называемое «трапециевидное» управление. Показано, что это управление не «слишком» чувствительно к величине параметров системы, т.е. является робастным. Построенное управление позволяет предотвратить возникновение нежелательных вибраций в системе как в переходном процессе, так и после его окончания.

## Список литературы

1. Фельдбаум А.А. Основы теории оптимальных автоматических систем. М.: Наука, 1966. 624 с.
2. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1976. 392 с.
3. Болтянский В.Г. Математические методы оптимального управления. М.: Наука, 1969. 408 с.
4. Singh G., Kabamba P.T., McClamroch N.H. Planar Time-Optimal Control, Rest-to-Rest Slewing of Flexible Spacecraft // AIAA J. Guidance, Control and Dynamics. 1989. Vol. 12, No. 1. P. 71-81.
5. Singer N.C., Seering W.P. Preshaping Command Inputs to Reduce System Vibration // J. Dynamic Systems, Measurement, and Control. 1990. Vol. 112. P. 76-81.
6. Самсонов В.А. Очерки о механике: Некоторые задачи, явления и парадоксы // Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001. 80 с.
7. Добрынина И.С., Черноусько Ф.Л. Ограниченное управление линейной системой четвертого порядка // Изв. РАН. ТиСУ. 1994. № 4. С. 108-115.
8. Chernousko F.L., Dobrynina I.S. Constrained Control in a Mechanical System with Two Degrees of Freedom // IUTAM Symp. On Optimization of Mechanical Systems / Eds. D. Bestle, W. Schiehlen. Stuttgart: Kluwer Acad. Publ., 1995. P. 57-64.
9. Черноусько Ф.Л., Акуленко Л.Д., Соколов Б.Н. Управление колебаниями. М.: Наука, 1980. 384 с.
10. Четаев Н.Г. Устойчивость движения. М.: Наука, 1965. 176 с.