УДК 51-76

ДВИЖЕНИЯ ГЛАЗ, ИХ РОЛЬ В ЗРЕНИИ И ПРОБЛЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ

Д.В. Алексеевский
Институт проблем передачи информации
Россия, 127051, Москва, Большой Каретный пер., 19
E-mail: dalekseevsky@iitp.ru

Ключевые слова: движения глаз, роль движения глаз для зрения, принципы зрения, саккады, саккадические циклы, восстановление цикла по набору осей вращения и управление саккадами, конфигурационное пространство, законы Дондерса и Листинга.

Аннотация: В докладе рассматривается различные типы движения глаз, которые делятся на быстрые движения (саккады) и медленные движения (дрейф и плавное преследование). Обсуждается роль различных типов движения глаз для зрения и формулируются основные принципы перцепции. Грубо говоря, они состоят в том, что зрение есть результат взаимодействия информации о характеристиках света, падающего на сетчатку глаза, и информации о положении глаза, которая содержится в окуломоторной системе, управляющей движением глаз. В терминах расслоения Хопфа и его локального сечения формулируется закон Листинга, описывающий конфигурационное пространство глаза. Вводится понятие саккадического цикла и показывается что знание осей вращения саккад, которые выбирает окуломоторная система, достаточно чтобы его восстановить и преобразовать ретинную информацию в неподвижную систему координат.

1. Введение

Движение глаз играет фундаментальную роль в зрении. Глаза непрерывно двигаются. Даже когда взгляд направлен на неподвижную точку, глаза участвуют в т.н. фиксационных движениях (FEM). Классические опыты Альфреда Ярбуса показывают, что компенсация движения глаз приводит к потере зрения через 2-3 секунды.

Имеется два типа движений глаз – монокулярные, когда взгляды коллинеарны, т.е. остаются параллельными (conjugated) и бинокулярные (преже всего, вергенция), когда это не так. В первом случае достаточно описывать движение одного глаза.

Долгое время изучали в основном монокулярные движение глаз. Если голова неподвижна, монокулярные движения исчерпываются саккадами, дрейфом и плавным преследованием и конфигурационное пространство глаза двумерно (закон Дондерса) и описывается законом Листинга. Отметим, что плавное преследование, предназначенное для перцепции движения объектов, исключительно важно для выживания животных, включая приматов.

Имеется две альтарнативные точки зрения на управление движением глаз: теория Э. Геринга, утверждающая, что имеется врожденный механизм синхронного движения глаз, и теория Г. Гельмгольца, согласно которой оба глаза управляются независимо. Долгое время предпочтение отдавалась теории Геринга, что стимулировало монокулярный подход. Сейчас накопились факты противоречащие как одной так и другой теории. Считается, что они дополняют друг друга и наряду с врожденными механизмами управления глазами есть и благоприобретенные в процессе зрения.

Мы будем предполагать, что голова неподвижна и в основном рассматривать монокулярные движения. включая приматов).

2. Глаз как оптический прибор

С оптической точки зрения глаз представляет из себя оптический прибор в виде сферы S^2_E, который с помощью линзы (состоящей из кристаллика и радужной оболочки) фокусирует падающие на линзу световые лучи на сетчатку (ретину) $\mathbb{R} \subset S^2_E$ (составляющую 2/3 глазной сферы S^2_E) . Геометрически отображение поверхности $\Sigma \subset E^3 = \mathbb{R}^3$ на сетчатку дается центральным проектированием с центром в нодальной точке N (оптическогом центре) глаза

$$\pi : \Sigma \to R,\ A \mapsto \bar{A} := r(A, N) \cap R$$

где $r(A, N)$ – луч из точки A, проходящий через N.

Фоторецепторы, регистирующие световые лучи, расположены крайне неравномерно. Наибольшая плотность (150 000 cells/mm^2) наблюдается в фовеа (центральной ямке) диаметром 3,5 мм, центр F которой расположен напротив нодальной точки N глаза. При удалении от центра F плотность рецепторов сильно снижается. Все колбочки, ответственные за дневное цветовое зрение, расположены в окрестности фовеа.

Замечание 1. *Можно сказать, что, в первом приближении, ретинным образом стимула (поверхности, испускающей свет) является функция $f(z, t)$ плотности энергия света на сетчатке. Здесь $z = x + iy$ – комплексная координата на сфере. Наиболее важными объектами для перцепции являются линии уровня этой функции с большим градиентом (контуры). Значения функции на контурах не важно, т.к. может меняться в зависимости от освещенности. Даже когда внешний объект неподвижен, функция $f(z, t)$ существенно зависит от времени t ввиду непрерывного движения глаза.*

3. Глаз как вращающийся шар

С механической точки зрения глаз представляет из себя твердое тело B^3_E (шар) с граничной сферой S^2_E, который может вращаться относительно своего центра O. Вращение реализуется с помощью трех пар мускулов, которые вращают глаз относительно трех взаимно ортогональных осей ($\mathbb{R}i$, $\mathbb{R}j$, $\mathbb{R}k$). (в любом направлении – по и против часовой стрелки).

Окуломоторная система управляет сокращением этих мускулов и движением глаза на основании информации от зрительной коры. В свою очередь копия окуломоторных команд, управляющих положением глаз, посылается в высшие разделы зрительной системы, где встречается с обработанной в зрительной системе информацией о ретинном образе стимула.

Зрение, т.е. восприятие, распознавание и классификация зрительных стимулов, возникает как результат взаимодействия переработанной в зрительной коре информации о свете, падающем на сетчатку с информацией о положении глаза, содержащейся в окуломоторной стстеме.

4. Законы Дондерса и Листинга. Конфигурационное пространство глаза

Мы будем использовать кватернионную геометрию и вложим Евклидово пространство $E^3 = \mathbb{R}^3$ в алгебру кватернионов $\mathbb{H} = Re(\mathbb{H}) + Im(\mathbb{H}) = \mathbb{R}1 + E^3$ как подпространсмтво мнимых кватернионов. Умножение мнимых кватернионов $XY = \langle X, Y\rangle + X \times Y$ определяется скалярным и векторным умножением. Присоединенное представление $\mathrm{Ad}_a X = aXa^{-1} = aX\bar{a}$ группы $S^3 = \mathbb{H}_1$ единичных кватернионов E^3 задает гомоморфизм $\mathbb{H}_1 \to SO(3), a \mapsto \mathrm{Ad}_a$ являющийся универсальным $\mathbb{Z}_2$-накрытием. Мы рассматриваем орбиту $\mathrm{Ad}_{\mathbb{H}_1} i = S^2_E \simeq \mathbb{H}_1/SO(2)$ как модель глазной сферы.

Отождествим евклидово пространство $E^3 = \mathbb{R}^3 = \mathrm{span}(i, j, k)$ с пространством мнимых кватернионов $Im\mathbb{H}$. Присоединенное представление $\mathrm{Ad}_a X = aXa^{-1}$, $a \in \mathbb{H}_1$, $X \in E^3 = Im\mathbb{H}$ группы $\mathbb{H}_1 = S^3 \subset \mathbb{H}$ единичных кватернионов действует в E^3 как ортогональная группа $SO(3) = \mathrm{Ad}_{\mathbb{H}}$.

Главное расслоение

$$\chi : \mathbb{H}_1 = S^3 \to S^2_E,\ a \mapsto \mathrm{Ad}_a i$$

над единичной сферой S^2_E называется расслоением Хопфа. Экваториальная 2-сфера $S^2_L = S^3 \cap \mathrm{span}(1, j, k) = S^3 \cap i^\perp$ называется сферой Листинга, а ее северная полусфера $S^+_L = \{a,\ Re\, a > 0\}$ – полусферой Листинга. [1].

Отображение Хопфа $\chi : S^+_L \to \tilde{S}^2_E = S^2_E \backslash \{i\}$ есть диффеоморфизм на проколотую сферу $\tilde{S}^2_E$. Обратное отображение $\sigma : \tilde{S}^2_E \to S^+_L$ называется сечением Листинга.

Точка $a \in S^+_L$ записывается в виде $a = e^{\alpha q}$, $q = \cos\theta + \sin\theta q$ и задает 1-параметрическую группу преобразований $e^{tq} \subset S^2_L \subset \mathbb{H}_1$, действующую в E^3 как группа вращений $\mathrm{Ad}_{e^{tq}} = R^{2t}_q$ относительно оси $\mathbb{R}q \subset E^3$.

Обозначим через $f^a = \mathrm{Ad}_a f^1 = \mathrm{Ad}_a(i, j, k)$ репер, полученный из примарного репера $f^1 = (i, j, k)$ преобразованием Ad_a. Мы предполагаем, что голова неподвижна и рассматриваем сферу S^2_E как модель глаза в примарном положении, задаваемом репером f^1, где i задает примарное направление взгляда – прямо вперед, k – вверх и $j = k \times i$ – слева-направо. Любое другое положение глаза задается репером вида $f^a = (f^a_1, f^a_2, f^a_3) := \mathrm{Ad}_a f^1$.

Закон Дондерса (Donders' law). Конфигурационное пространство глаза двумерно и направление $f_1 \in S^2_E$ взгляда определяет положение глаза $f = (f_1, f_2, f_3)$.

Закон Листинга (Listing's law) [1]. Конфигурационное пространство глаза есть полусфера Листинга S^+_L. Более точно, точка $a = e^{\alpha q} \in S^+_L$ определяет положение глаза f^a , полученное из примарного положения вращением $\mathrm{Ad}_a = R^{2\alpha}_q$.

Пара точек $a \neq b \in S_L^+$ определяет геодезическую

$$g_{a,b} = \mathrm{span}(a,b) \cap S_L^2 \subset S_L^2$$

сферы Листинга, которая допускает каноническую параметризацию

$$g_{a,b}(t) = g_{p,m}(t) = \cos t\, p + \sin t\, m$$

где $m = e^{\mu q}$, $q \in S_L^1$ точка с максимальной щиротой μ, а

$$p = \cos\theta\, j + \sin\theta\, k$$

– точка пересечения геодезической с экватором $S_L^1 = pS_L^+$ и $\langle q,p\rangle = 0$, $qp = q \times p = i$.

5. Саккады

Саккады служат для того, чтобы лучше рассмотреть одну из важных и выделенных точек (salient points) $\tilde{A}$ рассматриваемого зрительного стимула. Для этого новое направление взгляда $A \in S_E^2$ выбирается так, чтобы центральная проекция $\bar{A} = \pi_N \tilde{A}$ попада на фовеа, т.е. оказалась бы недалеко от точки F. Каждую секунду происходит 2–3 саккады. Таким образом за день набирается больше чем 150 000 саккад.

Саккады являются быстрыми (до 800^o у человека и до 1000^o у обезьян) баллистическими вращениями глаза вокруг некоторой оси O, переводящими направление взгляда $A \in S_E^2$ в направление взгляда $B \in S_E^2$. Точки A, B однозначно определяют саккаду, которая обозначается $Sac(A,B)$. Баллистичность означает, что во время саккады окуломоторная система не контролирует направление движения.

Зрительная системы планирует новое направление взгляда B саккады $Sac(A,B)$, выбирая, как правило, направление на заметную, выделенную точку рассматриваемого объекта.

6. Расслоение Хопфа и геометрия саккад

Саккада $Sac(A,B)$, переводящая направление взгляда $A \in \tilde{S}_E^2$ в направление $B \in \tilde{S}_E^2$, определяется как вращение R_Ω^t, $t \in [0,t_0]$ переводящее направление A в направление B и удовлетворяющее закону Листинга.

Имеется однопараметрическое семейство вращений, переводящих точку A в точку B. Они параметризуются плоскостями, проходящими через эти точки [1]

Для любых точек A, B существует единственная саккада $Sac(A,B)$, переводящая направление взгляда A в направление B. Она осуществляется вращением R_Ω^t на угол $\varphi = 2\angle(i+A, i+B)$ относительно оси $\mathbb{R}O$, где $\Omega = \overline{(i+A)\times(i+B)}$ есть единичный нормальныq вектор плоскости $\Pi_{A,B} = \Pi(A,B,-i) = i + \mathrm{span}(A+i, B+i)$.

Кривая взгляда $A(t) \subset S_E^2$, $A(0) = A$, $A(t_1) = B$ есть сегмент AB окружности $S_{A,B}^1 = \Pi(A,B,-i) \cap S_E^2$.

Оси вращения саккад с начальным направлением взгляда A лежат в плоскости $L_A = (i+A)^\perp$ с единичной нормалью $N_A = \overline{i+A} := \frac{i+A}{|i+A|}$. Единичный вектор $\overline{i+A}$ называется вектором нормали A-плоскости Листинга L_A.

7. Саккдические n циклы

Саккадический n цикл определяется [2] как система следующих друг за другом саккад

$$Sac(A_0, A_1), Sac(A_1, A_2), \ldots, Sac(A_{m-1}, A_m), \ldots, Sac(A_{n-1}, A_n),$$

начинающуюся и заканчивающуюся примарным направлением взгляда $A_0 = A_n = i$. Эквивалентно, цикл описывается как геодезический многоугольник (с самопересечениями)

$$a_0 a_1 a_2 \cdots a_{n-1} a_n,\ a_n = a_0 = 1$$

на полусфере Листинга S_L^+ с вершинами $a_m = \sigma(A_m)$ и сторонами $a_{m-1}a_m = \sigma(A_{m-1}A_m)$.

Снабдим группу $SO(3)$ стандартной биинвариантной метрикой, в которой геодезическими являются однопараметрические подгруппы и их левые сдвиги. Каждая саккада $Sac(A_{m-1}, A_m)$ задается геодезическим отрезком

$$R^t_{\Omega_m},\ t \in [0, 2\phi_m], \phi_m = \angle(N_{m-1}, N_m), \Omega = \overline{N_{m-1} \times N_m},\ N_m = N_{A_m},$$

который описывает движение взгляда $R^t A$ во время саккады. Поэтому саккадический цикл описывается кусочно геодезической кривой в группе $SO(3)$, состоящей из геодезических сегментов

$$R^t = R^t_{\Omega_m},\ 2(\phi_1 + \cdots \phi_{m-1}) \leqslant t \leqslant 2(\phi_1 + \cdots \phi_m), m = 1, \cdots, n.$$

Следующая теорема дает необходимые и достаточные условия того, что набор векторов является набром векторов вращения саккадического цикла и показывает как восстановить саккадический цикл, в частности углы вращений, по осям вращения. Таким образом, набор осей вращеия, которые выбирает окуломоторная система, достаточен для описания положения глаза во время саккадического цикла, независимо от скорости и ускорения саккад.

Теорема 1. *Пусть $(\Omega_1, \Omega_2, \ldots, \Omega_n, \Omega_{n+1} = \Omega_1)$ есть система векторов сферы S_E^2 таких, что любые три вектора вида $\Omega_{m-1}, \Omega_m, \Omega_{m+1}$ линейно независимы и выполняются неравенства $vol(\Omega_m, \Omega_{m+1}, i) \geqslant 0$, где vol есть стандартная форма объема. Тогда существует единственный саккадический цикл*

$$Sac(A_0, A_1), Sac(A_1, A_2), \ldots, Sac(A_{n-1}, A_n), Sac(A_n, A_{n+1}),\ A_{n+1} = A_0 = i$$

с осевыми векторами Ω_m. Направления взглядов даются формулой

$$A_m = -i + 2 < N_m, -i > N_m,$$

где векторы нормалей равны $N_m = \overline{\Omega_m \times \Omega_{m+1}}$.

Список литературы

1. Alekseevsky D.V. Microsaccades, Drifts, Hopf Bundle and Neurogeometry // J. Imaging. 2022. Vol. 8, No. 3. P. 76.
2. Alekseevsky D.V., Shirokov I.M. Geometry of saccades and saccadic cycles // Geometric Science of Information. 2023. Vol. 2. P. 493–500.