УДК 514.86

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ИНВАРИАНТЫ ДВИЖЕНИЯ НЕВЯЗКОЙ СРЕДЫ В ТРУБЕ

А.А. Дуюнова

Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН

Россия, 117997, Москва, Профсоюзная ул., 65

E-mail: annaduyunova@ipu.ru

Ключевые слова: уравнение Эйлера, криволинейные координаты, симметрии, дифференциальные инварианты.

Аннотация: Рассмотрена система дифференциальных уравнений в частных производных, описывающая течение невязкой жидкости (газа) в трехмерном пространстве. Также эта система записана в специальных криволинейный координатах, соответствующих модели трубы. Описана алгебра Ли симметрий этой системы. Приведена алгебра дифференциальных инвариантов, в частности, в бескоординатной форме. В качестве примера рассмотрены уравнения, описывающие поток вдоль круговой спиральной кривой, найдены ее симметрии и дифференциальные инварианты.

1. Введение

В работе изучаются симметрии и дифференциальные инварианты системы дифференциальных уравнений Эйлера, описывающей невязкие течения в некоторой области трехмерного пространства в поле тяжести. Рассматриваются две формы такой системы: записанные в обычных декартовых координатах и в криволинейных. Последняя отвечает модели трубы. Ранее (например, в [3]) рассматривались только бесконечно тонкие трубки, которые представлялись кривыми. В настоящей работе продолжено изучение потоков в трубках, но уже переменного радиуса. Для этого используется подход, примененный для уравнений течений на сферах и сферических слоях [1].

Суть метода заключается в использовании обобщенного уравнения движения сред на римановых многообразиях [2]. По существу, данный подход позволяет записать систему Эйлера в любых координатах.

2. Система Эйлера

Система дифференциальных уравнений в частных производных, описывающая движение невязкой среды на ориентируемом римановом многообразии (M, g) имеет вид (см. [2]):

$$
\begin{cases}
\rho(\mathbf{u}_t + \nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{u}) = -\operatorname{grad} p + \mathbf{g}\rho,\\
\dfrac{\partial(\rho\,\Omega_g)}{\partial t} + \mathcal{L}_{\mathbf{u}}(\rho\,\Omega_g) = 0,\\
\rho\theta\,(s_t + \nabla_{\mathbf{u}} s) = \operatorname{div}(k \operatorname{grad}\theta),
\end{cases}
\tag{1}
$$

где векторное поле $\mathbf{u} = (u, v, w)$ описывает поток среды, p, ρ, s, θ – давление, плотность, удельная энтропия и температура среды соответственно. Величина k – это теплопроводность (в настоящей работе постоянная), а $\mathbf{g}$ – ускорение свободного падения.

2.1. Алгебра Ли симметрий

Для описания алгебры Ли симметрий системы Эйлера рассмотрим алгебру Ли $\mathfrak{g}$, порожденную следующими векторными полями:

$$
\begin{aligned}
&X_1 = \partial_t, \quad X_2 = \partial_x, \quad X_3 = \partial_y, \quad X_4 = \partial_z, \quad X_5 = t\,\partial_x + \partial_u,\\
&X_6 = t\,\partial_y + \partial_v, \qquad X_7 = t\,\partial_z + \partial_w, \quad X_8 = y\,\partial_x - x\,\partial_y + v\,\partial_u - u\,\partial_v,\\
&X_9 = \left(\frac{\mathrm{g}t^2}{2} + z\right)\partial_x - x\,\partial_z + (\mathrm{g}t + w)\,\partial_u - u\,\partial_v,\\
&X_{10} = \left(\frac{\mathrm{g}t^2}{2} + z\right)\partial_y - y\,\partial_z + (\mathrm{g}t + w)\,\partial_v - v\,\partial_w,\\
&X_{11} = \partial_p, \qquad X_{12} = \partial_s, \qquad X_{13} = \theta\,\partial_\theta, \qquad X_{14} = p\partial_p + \rho\partial_\rho - s\partial_s,\\
&X_{15} = t\,\partial_t + x\,\partial_x + y\,\partial_y - \left(\frac{\mathrm{g}t^2}{2} - z\right)\partial_z - \mathrm{g}t\,\partial_w - s\,\partial_s,\\
&X_{16} = t\,\partial_t - \mathrm{g}t^2\partial_z - u\,\partial_u - v\,\partial_v - (2\mathrm{g}t + w)\,\partial_w - 2p\,\partial_p + s\,\partial_s.
\end{aligned}
$$

Пусть $\mathfrak{h}$ – алгебра Ли, порожденная полями: $Y_1 = \partial_s$, $Y_2 = \partial_p$, $Y_3 = \rho\,\partial_\rho$, $Y_4 = s\,\partial_s$, $Y_5 = p\,\partial_p$, $Y_6 = \theta\,\partial_\theta$.

Рассмотрим гомоморфизм алгебр $\vartheta\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ алгебр, заданный $\vartheta(X) = X(\rho)\,\partial_\rho + X(s)\,\partial_s + X(p)\,\partial_p + X(\theta)\,\partial_\theta$. Элементы алгебры $\mathfrak{g}_{\mathfrak{m}} = \ker\vartheta$ назовем *кинематическими симметриями*.

2.2. Дифференциальные инварианты

Можно рассмотреть два класса дифференциальных инвариантов системы Эйлера. Кинематические инварианты, т. е. функции инвариантные относительно продолженного действия алгебры $\mathfrak{g}_{\mathfrak{m}}$. Второй класс инвариантов представляет собой такие функции кинематических инвариантов, что являются также инвариантами некоторых термодинамических симметрий.

Функции ρ и θ порождают все кинематические $\mathfrak{g}_{\mathfrak{m}}$-инварианты нулевого порядка. Рассмотрим два вектора и матрицу:

$$
\operatorname{grad}\rho = \begin{pmatrix}\rho_x\\ \rho_y\\ \rho_z\end{pmatrix}, \quad \operatorname{grad}\theta = \begin{pmatrix}\theta_x\\ \theta_y\\ \theta_z\end{pmatrix}, \quad V = \begin{pmatrix}u_x & u_y & u_z\\ v_x & v_y & v_z\\ w_x & w_y & w_z\end{pmatrix}.
$$

Обозначим как H матрицу, составленную из векторов-столбцов $(\operatorname{grad}\rho \times \operatorname{grad}\theta$, $\operatorname{grad}\rho$, $\operatorname{grad}\theta)$ причем $\det \mathrm{H} \neq 0$, и $\operatorname{grad}\rho \times \operatorname{grad}\theta$ – векторное произведение. Элементы матрицы $\mathrm{H}^{-1}V\mathrm{H}$ суть девять функций, которые инвариантны относительно продолженного действия алгебры Ли $\mathfrak{g}_{\mathfrak{m}}$.

Непосредственно проверяется, что функции

$$(\operatorname{grad}\rho)^2, \quad (\operatorname{grad}\theta)^2, \quad \operatorname{grad}\rho\cdot\operatorname{grad}\theta, \quad \theta_t + u\theta_x + v\theta_y + w\theta_z \tag{2}$$

также $\mathfrak{g}_{\mathfrak{m}}$-инварианты.

Орбита элемента алгебры $\mathfrak{g}_{\mathfrak{m}}$ называется *регулярной,* если инварианты (2) и $(\mathrm{H}^{-1}V\mathrm{H})_{ij}$ независимы в ее окрестности, а также $\det \mathrm{H} \neq 0$. В противном случае, орбита называется *сингулярной.* Теорема Ли-Трессе [4] дает следующее утверждение.

Теорема 1. *Поле кинематических инвариантов системы Эйлера порождено инвариантами нулевого порядка ρ, θ, инвариантами первого порядка*

$$(\operatorname{grad}\rho)^2, \quad (\operatorname{grad}\theta)^2, \quad \operatorname{grad}\rho\cdot\operatorname{grad}\theta, \quad \theta_t+\theta_x u+\theta_y v+\theta_z w, \quad (\mathrm{H}^{-1}V\mathrm{H})_{ij}$$

и инвариантными дифференцированиями

$$\begin{aligned}
&\nabla_1 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} + u\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} + v\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y} + w\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z},\ \nabla_2 = \rho_x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} + \rho_y\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y} + \rho_z\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z},\\
&\nabla_3 = \theta_x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} + \theta_y\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y} + \theta_z\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z},\\
&\nabla_4 = (\rho_y\theta_z - \rho_z\theta_y)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} - (\rho_x\theta_z - \rho_z\theta_x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y} + (\rho_x\theta_y - \rho_y\theta_x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z},
\end{aligned}$$

где $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$, $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$, $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}$, $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}$ полные производные относительно t, x, y, z. Это поле разделяет регулярные орбиты.

Оператор V, использованный выше, в действительности является ковариантным дифференциалом векторного поля $\mathbf{u}$, а именно, $V = d_{\nabla}\mathbf{u} \in T \otimes T^*$. Он соответствует тензору скорости деформации среды (подробно см. [2]).

Выберем инвариантый корепер $\omega = (dp,\, d\theta,\, \star(dp \wedge d\theta))$, где $\star$ – оператор Ходжа. Пусть $\omega' = g^{-1}(\omega)$ – двойственный репер. Таким образом, инварианты из теоремы 1 можно представить в бескоординатном виде. А именно, скалярные произведения ковекторов ω, девять координат оператора V в этом кобазисе и материальная производная температуры θ. Четыре инвариантых дифференцирования в бескоординатном представлении являются горизонтальными поднятиями векторных полей ω'.

3. Течения в трубах

Рассмотрим модель трубы как цилиндрической окрестности $P \subset \mathbb{R}^3(X,Y,Z)$ гладкой кривой l. Пусть эта кривая задана в параметрическом виде $\{X = f_1(a),\, Y = f_2(a),\, Z = f_3(a)\}$, где a – натуральный параметр. В плоскости перпендикулярной к кривой l в точке $l(a) = (f_1(a), f_2(a), f_3(a))$, введем двумерную прямоугольную систему координат (O,x,y), где точка $l(a)$ есть начало координат O, роль единичных векторов играют векторы нормали и бинормали.

Таким образом, в окрестности кривой l переход криволинейных координат (a, x, y) к декартовым координатам (X, Y, Z) задан формулами

$$\begin{aligned} X &= f_1(a) + \frac{f_1''(a)}{|\kappa(a)|}x + b_1 y, \\ Y &= f_2(a) + \frac{f_2''(a)}{|\kappa(a)|}x + b_2 y, \\ Z &= f_3(a) + \frac{f_3''(a)}{|\kappa(a)|}x + b_3 y, \end{aligned}$$

где $\kappa(a)$ – кривизна кривой, (b_1, b_2, b_3) – единичная бинормаль в точке $l(a)$. Под трубой радиуса r понимается область P пространства: $x \leqslant r < \frac{1}{|\kappa(a)|}$.

Стандартная евклидова метрика $g = dX^2 + dY^2 + dZ^2$ в криволинейных координатах $(a, x, y) \subset P$ имеет вид

$$g = \left((1 - x|\kappa(a)|)^2 + \tau^2(a)(x^2 + y^2)\right) da^2 + 2\tau(a)\,(x\,dy - y\,dx) \cdot da + dx^2 + dy^2,$$

где $\kappa(a)$ и $\tau(a)$ – кривизна и кручение в точке $l(a)$, соответственно. Связанная с метрикой g форма объема принимает $\Omega_g = |1 - x|\kappa(a)||\; da \wedge dx \wedge dy$. Благодаря выражению метрики в криволинейных координатах система Эйлера может быть переписана для риманова многообразия (P, g). Заметим, что правая часть уравнения Эйлера содержит три типа сил. Первый и второй типы – это координатные выражения градиента давления и силы тяжести. Третий тип сил, который зависит от координат векторного поля скоростей и инвариантов кривой κ, τ, представляет собой фиктивные силы, появляющиеся из-за неинерциальности системы координат (a, x, y).

3.1. Спиральные трубы

Рассмотрим случай круговой спирали с постоянными кривизной $\kappa > 0$ и кручением $\tau > 0$. Тогда уравнения Эйлера примут вид:

$$\left\{ \begin{aligned} &\rho\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = \frac{\rho u \kappa}{\mu}(2v - \tau y u) - \frac{1}{\mu^2}(p_a + \tau(y p_x - x p_y)) - \frac{\rho \mathrm{g} \tau}{\mu\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}}, \\ &\rho\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \rho u \left(\left(\tau^2 x - \kappa\mu - \frac{\kappa\tau^2 y^2}{\mu} \right) u + 2\tau \left(\frac{\kappa y v}{\mu} + w \right) \right) - \\ &\qquad - \frac{\tau y}{\mu^2} p_a - \left(1 + \frac{\tau^2 y^2}{\mu^2} \right) p_x + \frac{\tau^2 x y}{\mu^2} p_y - \frac{\rho \mathrm{g} \tau^2 y}{\mu\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}}, \\ &\rho\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t} = \rho u \tau\,(u\tau y - 2v) \left(1 + \frac{\kappa x}{\mu} \right) + \frac{\tau x}{\mu^2} p_a + \frac{\tau^2 x y}{\mu^2} p_x - \left(1 + \frac{\tau^2 x^2}{\mu^2} \right) p_y + \\ &\qquad + \frac{\rho \mathrm{g}}{\mu\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}} \left(\left(\kappa^2 + \tau^2 \right) x - \kappa \right), \\ &\quad \rho_t + (\rho u)_a + (\rho v)_x + (\rho w)_y = \frac{\kappa}{\mu}\rho v, \\ &\frac{\rho\theta}{k}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \frac{\theta_{aa}}{\mu^2} + \left(1 + \frac{\tau^2 y^2}{\mu^2} \right) \theta_{xx} + \left(1 + \frac{\tau^2 x^2}{\mu^2} \right) \theta_{yy} + \frac{2\tau}{\mu^2} \left(y\theta_{ax} - \tau x y \theta_{xy} - x\theta_{ay} \right) \\ &\qquad + \frac{\kappa\tau y}{\mu^3}\theta_a + \frac{1}{\mu} \left(\frac{\kappa\tau^2 y^2}{\mu^2} - \frac{\tau^2 x}{\mu} - \kappa \right) \theta_x - \left(\frac{\kappa\tau^2 x y}{\mu^3} + \frac{\tau^2 y}{\mu^2} \right) \theta_y. \end{aligned} \right. \tag{3}$$

Эта система допускает десятимерную алгебру кинематических симметрий, порожденную полями $Z_1, \ldots, Z_{10}$. Заметим, что эти симметрии нельзя получить из симметрий обычных уравнений Эйлера заменой координат. В частности, поднятие изометрий метрики g в 0-джеты не дает симметрий уравнений (3), иными словами, эти симметрии системы – точечные симметрии. Хотя, очевидно, имеет место соответствие между этими двумя алгебрами симметрий, например, аналогичную роль трансляций X_2, X_3, X_4 играют другие три симметрии, которые содержат компоненты вектора скорости u, v, w. Симметрии

$$
\begin{aligned}
Z_4 &= tZ_1 + \frac{1}{\mu}\left(\partial_u + \tau y\,\partial_v - \frac{\lambda^2 x - \kappa}{\tau}\,\partial_w\right),\\
Z_5 &= tZ_2 + \frac{\sin(\lambda a)}{\mu}\,(\kappa\partial_u - \tau\partial_w) + \left(\lambda\cos(\lambda a) + \frac{\kappa\tau y\sin(\lambda a)}{\mu}\right)\partial_v,\\
Z_6 &= tZ_3 + \frac{\cos(\lambda a)}{\mu}\,(\kappa\partial_u - \tau\partial_w) + \left(-\lambda\sin(\lambda a) + \frac{\kappa\tau y\cos(\lambda a)}{\mu}\right)\partial_v
\end{aligned}
$$

отвечают галилеевым симметриям X_5, X_6, X_7. Конечно, также имеются сдвиг по времени ∂_t и аналог поворотных симметрий X_8, X_9, X_{10}, выражения которых слишком длинные и не приводятся.

Более того, алгебра Ли кинематических симметрий системы (3) имеет структуру аналогичную $\mathfrak{g}_\mathfrak{m}$. Для явного построения дифференциальных инвариантов системы (3) мы используем их бескоординатное представление, описанное выше.

Исследование частично выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 21-71-20034.

Список литературы

1. Duyunova A., Lychagin V., Tychkov S. Differential invariants for spherical layer flows of viscid fluids. // Journal of Geometry and Physics. 2018. Vol. 130. P. 288–292.
2. Duyunova A., Lychagin V., Tychkov S. Continuum mechanics of media with inner structures. // Differential Geometry and its Applications. 2021. Vol. 74. P. 101703.
3. Duyunova A., Lychagin V., Tychkov S. Symmetry classification of viscid flows on space curves. // Journal of Geometry and Physics. 2021. Vol. 160. P. 103997.
4. Kruglikov B., Lychagin V. Global Lie–Tresse theorem. // Selecta Mathematica. 2016. Vol. 22, No. 3. P. 1357–1411.