УДК 536 + 517.977.5

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ФИЛЬТРАЦИЕЙ В ДВУМЕРНОЙ ОБЛАСТИ С УЧЕТОМ ФУНКЦИИ ГЛУБИНЫ

М.И. Костючек

Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН

Россия, 117997, Москва, Профсоюзная ул., 65

E-mail: max31@list.ru

Ключевые слова: закон Дарси, асимптотика по времени, оптимальное управление, принцип минимума информации.

Аннотация: Рассмотрена задача оптимального управления фильтрации газа в двумерной области по закону Дарси. Чтобы учесть третье измерение в задаче оптимизации применяется функция глубины. Управляющими параметрами являются интенсивности добычи скважин. Оптимальные интенсивности ищутся на основе принципа минимума информации при ограничениях и заданной массе газе, которую надо добыть за определенное время.

1. Введение

Решение трехмерных задач фильтрации не поддаются аналитическому решению и требуют применение сложных численных методов. К тому же глубина и ширина нефтегазовых месторождений сильно меньше его длин, поэтому для расчетов предлагается использовать двумерные задачи фильтрации, но которые будут учитывать глубину при расчете массы добытого вещества.

Если предположить, что энтальпия при фильтрации постоянная, то модель фильтрации сводится к одному нелинейному дифференциальному уравнению [1], которое можно исследовать с помощью асимптотики по малому параметру [2]. В итоге получается уравнение Лапласа. Так как мы рассматриваем уравнение Лапласа в двумерной области, то мы можем применить конформное преобразование на единичный круг [3]. Поэтому мы будем рассматривать задачу в единичном круге.

Оптимальные интенсивности добычи будем искать на основе принципа минимума прироста информации [4], предполагая, что интенсивности добычи – это вероятности. При этом будем требовать, чтобы за определенное вермя была добыта заданная масса вещества. Добытая масса вычисляется с помощью интенсивностей добычи и функции глубины.

2. Модель фильтрации

Фильтрация флюидов описывается уравнением сохранения массы, импульса и теплоты (или энергии).

Уравнение сохранения массы

$$\frac{\partial(m\rho)}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho U) = -\sum_j c_j f_j,$$

закон Дарси, который является уравнением сохранения импульса

$$U = -\frac{k}{\mu}\nabla p,$$

уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial T}{\partial t} + U(T) - a\Delta T = -\sum_j q_j g_j$$

где ρ – плотность, p – давление, T – температура, U – скорость фильтрации, m – пористость, k – коэффициент проницаемости, μ – коэффициент динамической вязкости, f_j, g_j – функции источников массы и тепла, $c_j = c_j(t)$, $q_j = q_j(t)$ – интенсивности источников массы и тепла.

Эти уравнения дополняются уравнениями состояния. Обычно это термическое и калорическое уравнения

$$p = p(\rho, T), \quad \varepsilon = \varepsilon(\rho, T).$$

Рассмотрим случай, когда энтальпия постоянная. Тогда $p = p(\rho, T(\rho)) = p(\rho)$. Останется только одно уравнение

$$\Delta\bigl(Q(\rho)\bigr) = \frac{\partial(m\rho)}{\partial t} + \sum_j c_j f_j$$

где

$$Q(\rho) = \int \frac{k}{\mu}\rho p'(\rho) d\rho. \tag{1}$$

Перейдем к асимптотике по времени. Пусть $t' = t/\tau$, $\epsilon = 1/\tau$. Пусть $\epsilon \ll 1$, тогда предположим, что справедливо разложение

$$\rho(\mathbf{x}, t) = \sum_{i\geqslant 0} \frac{\epsilon^i}{i!}\rho_i(\mathbf{x}, t).$$

Тогда из уравнения (1) получем уравнение для члена асимптотики нулевого порядка

$$\Delta u_0 = \sum_j c_j f_j, \tag{2}$$

где обозначено $u_0 = Q(\rho_0)$.

Пусть в окрестности скважины решение (2) имеет особенность, тогда можно предположить, что $f_j = \delta(\mathbf{x} - a_j)$, где $\delta(\mathrm{x})$ – δ-функция Дирака.

Зная значения плотности ρ_{c0} на границе области мы можем найти граничное условие $u_{c0}u_0(\rho_c 0)$. Тогда задача на функцию u_0 будет иметь вид

$$(3) \qquad \begin{cases} \Delta u_0 = \sum\limits_j c_j \delta(\mathbf{x} - a_j) \\ u_0|_{\partial D} = u_{c0} \end{cases} .$$

Пусть мы ищем решение задачи (3), тогда решение будет иметь вид

$$(4) \qquad u_0(\mathrm{x}, t) = \frac{1}{2\pi} \sum_j c_j(t) \left(-\ln|\mathrm{x} - a_j| + \int\limits_{\partial D} u_{c0} \frac{1 - r^2}{|\mathrm{x} - \eta|^2} dl_\eta \right),$$

где $r = |x|$. Плотность ρ_0 можно найти из уравнения $u_0 = Q(\rho_0)$.

3. Оптимальное управление

Предположим, что нам заданы координаты расположения скважин и требуется за время T добыть газа массой M. Будем искать оптимальные интенсивности на основе принципа минимума информации при заданных ограничениях. Для этого будем интерпретировать величины $q_j = c_j/c$, $c = \sum_j c_j$ как вероятности некоторой случайной величины X, которая принимает значения x_j. Например, величину X можно интерпретировать, как расстояния от j-й скважины до ближайшей.

Масса газа M добываемая за время T

$$(5) \qquad M = \sum_j V_j z(a_j) \int\limits_0^T c_j(t) dt = \sum_j z(a_j) \int\limits_0^T q_j(t) c(t) dt.$$

где $z(x)$ – функция глубины, V_j – эффективный объем j-й скважины, который определяется на основе решения (4).

Предположим, что мы знаем функцию $c(t)$.

Прирост информации распределения случайной величины X:

$$I(q) = \sum_j q_j \ln q_j.$$

Пусть задано среднее значение случайной величины X

$$(6) \qquad A = \sum_j q_j x_j.$$

Ищем минимум функции $I(q)$ по q_j при ограничениях (5), (6) и $\sum_j q_j = 1$. Тогда целевая функция примет вид

$$L = I(q) - \lambda_0 \left(\sum_j q_j - 1 \right) - \lambda_1 \left(\sum_j q_j x_j - A \right) - \lambda_2 \left(\sum_j V_j z(a_j) m_j - M \right).$$

где введено обозначение $m_j = \int_0^T q_j(t)c(t)dt$.

Тогда из условия $\frac{\partial L}{\partial q_j} = 0$ находим оптимальные интенсивности

$$q_j = \exp(\lambda_0 - 1 + \lambda_1 x_j + \lambda_2 V_j z_j C),$$

где $C = \int_0^T c(t)dt$. Выражения (5), (6) и $\sum_j q_j = 1$ дают

$$q_j = \frac{\exp(\lambda_1 x_j + \lambda_2 V_j z_j C)}{Z(\lambda_1, \lambda_2)},$$

где $Z(\lambda_1, \lambda_2) = \sum_j \exp(\lambda_1 x_j + \lambda_2 z_j C)$ и параметры λ_1, λ_2 можно найти из уравнения

$$\frac{\partial Z}{\partial \lambda_1} = AZ, \quad \frac{\partial Z}{\partial \lambda_2} = Z\frac{\partial M}{\partial T}$$

Данная работа выполнена при частичной поддержке гранта Российского научного фонда (проект № 21-71-20034).

Список литературы

1. Kostiuchek M.I. Gas Filtration at Constant Thermodynamic Potential // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2022. Vol. 43, No. 10. P. 2746–2756.
2. Akhmetzianov, A.V., Kushner, A.G., Lychagin, V.V. Long-time asymptotics for the Buckley-Leverett models of development of oil and gas fields // Proceedings of the 11th IEEE International Conference on Application of Information and Communication Technologies AICT. Moscow, 2017. P. 505–507.
3. Akhmetzianov, A.V., Kushner, A.G., Lychagin, V.V. Optimal Management of Oil Field Development in the Buckley–Leverett Model // Automation and Remote Control. 2018. Vol. 79. P. 641–654.
4. Evans R.A. The Principle of Minimum Information // IEEE Transactions on Reliability. 1969. Vol. R-18, Is. 3. P. 87-90.