УДК 517.958

ИНТЕГРИРУЕМЫЕ СТРУКТУРЫ УРАВНЕНИЯ ТКАНЕЙ ВЕРОНЕЗЕ

И.С. Красильщик
Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН
Россия, 117997, Москва, Профсоюзная ул., 65
E-mail: josphkra@gmail.com

Ключевые слова: дифференциальные уравнения, классификация, симметрии, законы сохранения, операторы рекурсии, симплектические и пуассоновы структуры.

Аннотация: Уравнение тканей Веронезе является частным случаем ABC-уравнения $Au_tu_{xy} + Bu_xu_{yt} + Cu_yu_{xt} = 0$ при $A + B + C = 0$, где A, B, C – константы. Уравнение ABC допускает пару Лакса, а уравнение тканей Веронезе обладает операторами рекурсии. Вычисление симметрий и законов сохранения показывает, что ABC-уравнение распадается на 14 типов, из которых наиболее по интегрируемости интересны четыре: (1) $A+B+C=0$, (2) $A=B=C$, (3) $C=A/2$, $B=-A$, (4) $B=C=2A$. В работе описаны соответствующие интегрируемые структуры: операторы рекурсии, симплектические и пуассоновы структуры.

1. Введение

По-видимому, уравнение ABC

(1) $$Au_tu_{xy} + Bu_xu_{yt} + Cu_yu_{xt} = 0$$

возникло в [5] в связи с трехмерными тканями Веронезе. В [1] показано, что уравнение обладает парой Лакса. В [3] установлено существование бесконечной серии нелокальных законов сохранения, а в [2] для $A + B + C = 0$ – бесконечных серий нелокальных симметрий и оператора рекурсии. «Групповая» классификация выявляет два случая: $A+B+C=0$ и $A+B+C \neq 0$, но вычисление косимметрий показывает, что этих случаев больше. В § 3 приведена классификация, в § 4 описаны интегрируемые структуры, а § 2 содержит теоретический материал.

2. Предварительные сведения

В геометрической теории [4] дифференциальные уравнения суть подмногообразия $\mathcal{E}$ в пространстве бесконечных джетов расслоения $\pi\colon \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, и существует расслоение $\pi_\infty\colon \mathcal{E} \to \mathbb{R}^n$. На $\mathcal{E}$ существует инволютивное n-мерное распределение Картана. Его интегральные многообразия – решения $\mathcal{E}$, его π_∞-вертикальные симметрии – симметрии уравнения. Существует взаимно однозначное соответствие между симметриями и сечениями расслоения $\pi_\infty^*(\pi)$, удовлетворяющими $\ell_{\mathcal{E}}(\varphi) = 0$, где $\ell_{\mathcal{E}}$ – линеаризация. Коммутатор симметрий индуцирует скобку Якоби $\{\cdot\,,\cdot\}$ на сечениях. Сечение, соответствующее симметрии, называется производящим, и мы не делаем различия между симметриями и их производящими сечениями.

Горизонтальная 1-форма ω называется законом сохранения, если она замкнута относительно горизонтального дифференциала де Рама. Каждому закону сохранения сопоставляется его производящее сечение ψ_ω, удовлетворяющее уравнению $\ell_{\mathcal{E}}(\psi_\omega) = 0$. Решения последнего называются косимметриями.

Морфизмом уравнений называется гладкая сюръеция $\Phi\colon \mathcal{E} \to \mathcal{E}'$, сохраняющая распределение Картана. Морфизм – накрытие, если его дифференциал изоморфен на картановских плоскостях. преобразованием Беклунда называется диаграмма накрытий $\mathcal{E} \xleftarrow{\tau} \mathcal{W} \xrightarrow{\tau'} \mathcal{E}'$. Если $\mathcal{E} = \mathcal{E}'$, то это автопреобразование Беклунда.

Касательное уравнение $\mathcal{TE}$ к уравнению $\mathcal{E}$ – это система, состоящая из $\mathcal{E}$ и уравнения $\ell_{\mathcal{E}}(q) = 0$. Соответственно, в кокасательном $\mathcal{T}^*\mathcal{E}$ добавляется уравнение $\ell^*_{\mathcal{E}}(p) = 0$. Оператор рекурсии для симметрий (косимметрий) – это автопреобразование Беклунда уравнения $\mathcal{TE}$ (соответственно, $\mathcal{T}^*\mathcal{E}$). Преобразования Беклунда вида $\mathcal{TE} \xleftarrow{\tau} \mathcal{W} \xrightarrow{\tau^*} \mathcal{T}^*\mathcal{E}$ интерпретируются как нелокальные симплектические (СС) и пуассоновы структуры на $\mathcal{E}$.

3. Симметрии, косимметрии и классификация

Представим уравнение ABC в виде

$$u_{xy} = \frac{au_x u_{yt} + bu_y u_{xt}}{u_t}, \quad a, b \neq 0. \tag{2}$$

Предложение 1. *Алгебра симметрий уравнения* (2) *порождена функциями* $\varphi_0 = f_0(u)$, $\varphi_1 = f_1(x)u_x$, $\varphi_2 = f_2(y)u_y$, $\varphi_3 = f_3(t)u_t$, *если* $a + b = 1$, *и функциями* $\varphi_{00} = 1$, $\varphi_{01} = u$, $\varphi_1 = f_1(x)u_x$, $\varphi_2 = f_2(y)u_y$, $\varphi_3 = f_3(t)u_t$ *в противном случае.*

Предложение 2. *В зависимости от пространства косимметрий уравнение* (2) *делится на 14 типов, из которых с точки зрения интегрируемости интересны следующие:*

1. $b = 1 - a$: $\psi_0 = g_0 u_t$, $\psi_1 = \dfrac{g_1 u_t}{u_x^2}$, $\psi_2 = \dfrac{g_2 u_t}{u_y^2}$, $\psi_3 = \dfrac{g_3}{u_t}$;
2. $a = b = -1$: $\psi_{01} = u_t$, $\psi_{02} = uu_t$, $\psi_1 = g_1 u_x u_t$, $\psi_2 = g_2 u_y u_t$, $\psi_3 = g_3 u_t^2$;
3. $a = -1$, $b \neq -2$: $\psi_0 = u_t$, $\psi_1 = g_1 u_x^{-b} u_t$, $\psi_2 = g_2 u_t u_y^{-\frac{b+2}{b}}$, $\psi_3 = g_3 u_t^{-b+1}$;
4. $\psi_0 = u_t$, $\psi_1 = g_1 u_x^{-\frac{a-b+1}{a}} u_t$, $\psi_2 = g_2 u_y^{\frac{a-b-1}{b}} u_t$, $\psi_3 = g_3 u_t^{-a-b}$ *в общем случае.*

Всюду выше $g_0 = g_0(u)$, $g_1 = g_1(x)$, $g_2 = g_2(y)$, $g_3 = g_3(t)$, *а «штрих» обозначает производную по соответствующему аргументу.*

Замечание 1. *Очевидно, уравнение* (2) *переходит в себя при замене* $a \leftrightarrow b$, $x \leftrightarrow y$. *Классификация, приведенная в предложении 2, дана по модулю этой симметрии.*

4. Интегрируемые структуры

Предложение 3. *Существует взаимно однозначное соответствие между симметриями (косимметриями) уравнения $\mathcal{E}$ и p-линейными (q-линейными) законами сохранения уравнения $\mathcal{T}^*\mathcal{E}$ (соответственно, $\mathcal{T}\mathcal{E}$).*

Нетривиальные структуры уравнения (2) существуют в случаях 1, 2, 3 и 4.

Замечание 2. *Случай 2 соответствует $A = B = C$. Тогда уравнение лагранжево, и найденные структуры происходят из тождественной.*

4.1. Случай 1

Предложение 4. *Пусть в уравнении* (2) $b = 1-a$. *Тогда система соотношений*

$$\begin{aligned}
&w_{1,y} = \frac{(a-1)(u_x D_y(\varphi) - u_y D_x(\varphi))}{u_x^2}, \qquad w_{1,t} = \frac{u_t D_x(\varphi) - u_x D_t(\varphi)}{u_x^2},\\
&w_{2,x} = \frac{a(u_y D_x(\varphi) - u_x D_y(\varphi))}{u_y^2}, \qquad w_{2,t} = \frac{D_t(\varphi)u_y - D_y(\varphi)u_t}{u_y^2},\\
&w_{3,x} = \frac{a(u_t D_x(\varphi) - u_x D_t(\varphi))}{u_t^2}, \qquad w_{3,y} = \frac{(a-1)(u_t D_y(\varphi) - u_y D_t(\varphi))}{u_t^2},\\
&\tilde{\varphi} = u_x w_1,\ \tilde{\varphi} = u_y w_2,\ \tilde{\varphi} = u_t w_3,
\end{aligned}$$

задает три оператора рекурсии для симметрий этого уравнения, а система

$$\begin{aligned}
&w_{2,x} = \frac{u_y(((a-1)u_y u_{xt} - a u_x u_{yt})\psi + (a-1)u_t u_y D_x(\psi) + a u_x u_t D_y(\psi))}{u_t^2},\\
&w_{2,t} = -\frac{u_y(u_{yt}\psi + u_t D_y(\psi))}{u_t},\\
&w_{3,x} = \frac{((a u_x u_{tt} - u_t u_{xt})\psi + u_t^2(2a-1)D_x(\psi) - u_x u_t D_t(\psi) + u u_t(a-1)D_x D_t(\psi))}{u_t},\\
&w_{3,y} = \frac{(a-1)(u_y u_{tt}\psi + 2u_t^2 D_y(\psi) + u u_t D_y D_t(\psi))}{u_t},\\
&\quad \tilde{\psi} = \frac{u_t w_2}{g_2 u_y^2},\ \tilde{\psi} = \frac{w_3}{g_3 u_t} - \frac{(a-1)u D_t(\psi)}{u_t}
\end{aligned}$$

– два оператора рекурсии для косимметрий.

Операторы из предложения 4 удобно переписать в «традиционном» виде:

$$\mathcal{R}_1^\varphi\colon \begin{cases} D_y(\tilde{\varphi}) = \dfrac{(a u_x u_y t - u_y(a-1)u_{xt})\tilde{\varphi}}{u_x u_t} - \dfrac{(a-1)u_y D_x(\varphi)}{u_x} + (a-1)D_y(\varphi),\\[2ex] D_t(\tilde{\varphi}) = \dfrac{u_{xt}\tilde{\varphi}}{u_x} + \dfrac{u_t D_x(\varphi)}{u_x} - D_t(\varphi); \end{cases}$$

$$\mathcal{R}_2^\varphi\colon \begin{cases} D_x(\tilde{\varphi}) = \dfrac{(a u_x u_{yt} - (a-1)u_y u_{xt})\tilde{\varphi}}{u_t u_y} - \dfrac{a u_x D_y(\varphi)}{u_y} + a D_x(\varphi),\\[2ex] D_t(\tilde{\varphi}) = \dfrac{u_{yt}\tilde{\varphi}}{u_y} - \dfrac{u_t D_y(\varphi)}{u_y} + D_t(\varphi); \end{cases}$$

$$\mathcal{R}_3^\varphi\colon \begin{cases} D_x(\varphi) = \dfrac{u_{xt}\tilde{\varphi}}{u_t} + a D_x(\varphi) - \dfrac{a u_x D_t(\varphi)}{u_t};\\[2ex] D_y(\tilde{\varphi}) = \dfrac{u_{yt}\tilde{\varphi}}{u_t} + (a-1)D_y(\varphi) - \dfrac{(a-1)u_y D_t(\varphi)}{u_t} \end{cases}$$

$$\mathcal{R}_1^\psi\colon \begin{cases} D_x(\tilde\psi) &= \dfrac{((2a-1)u_yu_{xt}-2au_xu_{yt})\tilde\psi}{u_yu_t}+\dfrac{((a-1)u_yu_{xt}-au_xu_{yt})\psi}{u_yu_t}+ \\ & +(a-1)D_x(\psi)-\dfrac{au_xD_y(\psi)}{u_y}, \\ D_t(\tilde\psi) &= -\dfrac{(2u_tu_{yt}-u_yu_{tt})\tilde\psi}{u_tu_y}-\dfrac{u_{yt}\psi}{u_y}-\dfrac{u_tD_y(\psi)}{u_y}; \end{cases}$$

$$\mathcal{R}_2^\psi\colon \begin{cases} D_x(\tilde\psi) &= -\dfrac{u_{xt}\tilde\psi}{u_t}+\dfrac{(au_xu_{tt}-u_tu_{xt})\psi}{u_t^2}+(2a-1)D_x(\psi)-\dfrac{au_xD_t(\psi)}{u_t}, \\ D_y(\tilde\psi) &= -\dfrac{u_{yt}\tilde\psi}{u_t}+\dfrac{(a-1)u_yu_{tt}\psi}{u_t^2}+2(a-1)D_y(\psi)-\dfrac{(a-1)u_yD_t(\psi)}{u_t}. \end{cases}$$

С помощью этих соотношений можно доказать

Предложение 5. *Система соотношений*

$$\begin{aligned}
\xi_{2,x} &= \frac{((a-1)u_yu_{xt}-au_xu_{yt})u_y\psi}{u_t^2}+\frac{(a-1)u_y^2D_x(\psi)}{u_t}-\frac{au_xu_yD_y(\psi)}{u_t},\\
\xi_{2,t} &= -\frac{u_yu_{yt}\psi}{u_t}-u_yD_y(\psi);\\
\xi_{3,x} &= \frac{(au_xu_{tt}-u_tu_{xt})\psi}{u_t}-u_xD_t(\psi)+(2a-1)u_tD_x(\psi)+(a-1)uD_xD_t(\psi),\\
\xi_{3,y} &= \frac{(a-1)u_yu_{tt}\psi}{u_t}+2(a-1)u_tD_y(\psi)+(a-1)uD_yD_t(\psi);\\
\theta_{1,x} &= \frac{((a-1)u_yu_{xt}-au_xu_{yt})\psi}{u_yu_t}+\\
&\quad +(a-1)D_x(\psi)-\frac{au_xD_y(\psi)}{u_y}+\frac{((2a-1)u_yu_{xt}-2au_xu_{yt})\theta_1}{u_tu_y},\\
\theta_{1,t} &= -\frac{u_{yt}\psi}{u_y}+\frac{(u_yu_{tt}-2u_tu_{yt})\theta_1}{u_yu_t}-\frac{u_tD_y(\psi)}{u_y};\\
\theta_{2,x} &= \frac{(au_xu_{tt}-u_tu_{xt})p}{u_t^2}-\frac{au_xp_t}{u_t}+(2a-1)p_x-\frac{u_{xt}\theta_2}{u_t},\\
\theta_{2,y} &= -\frac{u_{yt}\theta_2}{u_t}+\frac{(a-1)u_yu_{tt}\psi}{u_t^2}+2(a-1)D_y(\psi)-\frac{(a-1)u_yD_t(\psi)}{u_t};\\
\rho_{1,x} &= \frac{(au_xu_{tt}-(2a-1)u_tu_{xt})\psi}{(a-1)u_t^2}-\frac{u_{xt}\rho_1}{u_t}+\frac{D_x(\psi)}{a-1}-\frac{au_xD_t(\psi)}{(a-1)u_t},\\
\rho_{1,y} &= \frac{(u_yu_{tt}-2u_tu_yt)\psi}{u_t^2}-\frac{u_{yt}\rho_1}{u_t}-\frac{u_yD_t(\psi)}{u_t};\\
\rho_{2,x} &= \frac{u_{xt}p}{2(a-1)u_t}+\frac{(u_tu_{xt}-au_xu_{tt})\rho_2}{2(a-1)u_t^2}+\frac{au_x\rho_{2,t}}{2(a-1)u_t}+\frac{p_x}{2(a-1)},\\
\rho_{2,y} &= \frac{p_y}{2(a-1)}+\frac{u_y\rho_{2,t}}{2u_t}+\frac{u_{yt}p}{2(a-1)u_t}-\frac{u_yu_{tt}\rho_2}{2u_t^2};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}_{21}(\psi) &= u_y\xi_2-\frac{u_y^3\theta_1}{u_t},\\
\mathcal{H}_{22}(\psi) &= \frac{u_y(u_y^2u_{yt}-2u_tu_yu_{yy})\theta_1}{u_t^2}-\frac{u_y^3\theta_{1,y}}{u_t}+u_y\xi_{2,y},\\
\mathcal{H}_{31}(\psi) &= \frac{u_t^2\rho_1}{2}+u_t^2p-\frac{u_t^2\theta_2}{2(a-1)},\\
\mathcal{H}_{32}(\psi) &= \frac{u_tu_{tt}\rho_1}{2}+\frac{u_t^2\rho_{1,t}}{2}+u_tu_{tt}\psi-\frac{u_tu_{tt}\theta_2}{2(a-1)}-\frac{u_t^2\theta_{2,t}}{2(a-1)}+u_t^2D_t(\psi),
\end{aligned}$$

$$\mathcal{H}_{33}(\psi) = -\frac{u_t u_{tt}\rho_1}{2} - \frac{u_t^2\rho_{1,t}}{2} - u_t u_{tt}\psi + \frac{3u_t u_{tt}\theta_2}{2(a-1)} + \frac{3u_t^2\theta_{2,t}}{2(a-1)} + $$
$$+ u u_t D_t^2(\psi) - \frac{u_t\xi_{3,t}}{a-1},$$
$$\mathcal{H}_{34}(\psi) = -u u_t D_t(1y) - u_t^2\theta_2 + u_t\xi_3$$

определяет пять нелокальных гамильтоновых структур.

Можно построить 10 СС, а также 7 новых (по сравнению с предложением 4) операторов рекурсии для косимметрий и 11 – для симметрий.

4.2. Случай 3

Предложение 6. *При $a = -1$, $b = \frac{1}{2}$ уравнение* (2) *имеет СС:*

$$w_{1,y} = \frac{u_y D_x(\varphi) + 2u_x D_y(\varphi)}{2\sqrt{u_x}}, \qquad w_{1,t} = \frac{2u_x D_t(\varphi) + u_t D_x(\varphi)}{\sqrt{u_x}};$$
$$w_{3,y} = \frac{u_y D_t(\varphi) + 2u_t D_y(\varphi)}{2\sqrt{u_t}}, \qquad w_{3,x} = \frac{u_x D_t(\varphi) + 2u_t D_x(\varphi)}{\sqrt{u_t}};$$
$$\mathcal{S}(\varphi) = u_t q - \frac{u_t w_1}{2\sqrt{u_x}} - \frac{\sqrt{u_t} w_3}{2}.$$

4.3. Случай 4

Предложение 7. *При $a = b = 2$ уравнение* (2) *имеет СС:*

$$w_{2,x} = \frac{2u_y D_x(\varphi) + u_x D_y(\varphi)}{2\sqrt{u_y}}, \qquad w_{2,t} = \frac{2u_y D_t(\varphi) + u_t D_y(\varphi)}{\sqrt{u_y}};$$
$$w_{3,y} = \frac{u_y D_t(\varphi) + 2u_t D_y(\varphi)}{\sqrt{u_t}}, \qquad w_{3,x} = \frac{u_x D_t(\varphi) + 2u_t D_x(\varphi)}{2\sqrt{u_t}};$$
$$\mathcal{S}(\varphi) = u_t q - \frac{u_t w_2}{\sqrt{u_y}} - \frac{\sqrt{u_t} w_3}{2}.$$

5. Заключение

Исследование выполнено при частичной поддержке гранта Российского научного фонда, `https://rscf.ru/project/21-71-20034/`.

Список литературы

1. Burovskiy P.A., Ferapontov E.V., Tsarev S.P. Second-order quasilinear PDEs and conformal structures in projective space // Int. J. of Mathematics. 2010. Vol. 21, No. 06. P. 799–841.
2. Krasil'shchik I.S., Morozov O.I., Vojčák P. Nonlocal symmetries, conservation laws, and recursion operators of the Veronese web equation // J. Geometry and Physics. 2019. Vol. 146. P. 103519.
3. Krasil'shchik I.S., Sergyeyev A., Morozov O.I. Infinitely many nonlocal conservation laws for the ABC equation with $A + B + C \neq 0$ // Calc. Var. 2016. Vol. 55. P. 123.
4. Krasil'shchik J., Verbovetsky A., Vitolo R. The symbolic computation of integrability structures for partial differential equations. Texts & Monographs in Symbolic Computation. Basel: Springer.
5. Zakharevich I. Nonlinear wave equation, nonlinear Riemann problem, and the twistor transform of Veronese webs // 2000. `https://arxiv.org/abs/math-ph/0006001`.