УДК 514.8, 514.763.85

АЛГЕБРА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ИНВАРИАНТОВ ТОЧЕЧНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ УРАВНЕНИЙ КАЛОДЖЕРО

В.П. Кузнецова

Астраханский государственный университет им. В.Н. Татищева

Россия, 414056, Астрахань, ул. Татищева, 20а

E-mail: valeriawh3@mail.ru

Ключевые слова: дифференциальные инварианты, инвариантные дифференцирования, джеты.

Аннотация: Найдены допустимые точечные преобразования и построена соответствующая им алгебра дифференциальных инвариантов уравнений класса Калоджеро, зависящих от одной произвольной гладкой функции.

1. Введение

Класс уравнений типа Калоджеро имеет вид:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} = u\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) \tag{1}$$

Мы будем считать, что f – гладкая функция, т.е. функция класса C^∞.

Такие уравнения часто встречаются в теории жидких кристаллов, теории относительности, механике сплошных сред [2, 4].

Контактная классификация подобных уравнений рассматривалась в работах [5, 6]. Как показано в работе [1], применение метода эквивалентности Картана позволило доказать, что уравнение (1) приводится к линейному с помощью контактного преобразования. В работе [2] найдены необходимые и достаточные условия, при которых уравнение (1) контактно эквивалентно волновому уравнению. Это позволило найти его общее многозначное решение.

Однако, при контактных преобразованиях классические однозначные решения могут переходить в решения многозначные, что создает некоторые трудности при возвращении к исходному уравнению. Такие трудности могут возникнуть, например, при решении начальных и краевых задач. Поэтому представляет интерес классификации уравнений (1) относительно точечных преобразований, при которых такого эффекта не возникает.

2. Допустимые точечные преобразования уравнения Калоджеро

Допустимые точечные преобразования – это преобразования независимых переменных t, x и зависимой переменной u, при которых тип уравнения остается таким же, т.е. может меняться только функция f.

Пусть $J^2(\mathbb{R}^2)$ – пространство 2-джетов функций двух переменных с каноническими координатами $t, x, u_{00}, u_{10}, u_{01}, u_{20}, u_{11}, u_{02}$. В этих координатах дифференциальные формы Картана имеют вид:

$$\begin{aligned}
\omega_{00} &= du_{00} - u_{10}dt - u_{01}dx, \\
\omega_{10} &= du_{10} - u_{20}dt - u_{11}dx, \\
\omega_{01} &= du_{01} - u_{11}dt - u_{02}dx.
\end{aligned}$$

Уравнение (1) порождает в этом пространстве поверхность $\mathcal{E} = \{F = 0\}$, где

$$F = u_{11} - u_{00}u_{02} - f(u_{01}).$$

Мы будем искать такие векторные поля X, сдвиги вдоль траекторий которых сохраняют вид уравнения Калоджеро. Пусть

$$X = A(t, x, u_{00})\frac{\partial}{\partial t} + B(t, x, u_{00})\frac{\partial}{\partial x} + C(t, x, u_{00})\frac{\partial}{\partial u_{00}}$$

представляет собой векторное поле на пространстве 0-джетов и Φ_s – преобразование сдвига вдоль его траекторий от $s = 0$ до s. Предположим, что под действием этого преобразования поверхность $\mathcal{E}$ переходит в поверхность $\mathcal{E}_s = \{F_s = 0\} \subset J^2$, т.е. $\Phi_s^{(2)}(\mathcal{E}) = \mathcal{E}_s$. Запишем последнюю формулу в терминах функций:

$$\left(\Phi_s^{(2)}\right)^*(F) = g_s F_s. \tag{2}$$

Здесь $\Phi_s^{(2)}$ – продолжение преобразования Φ_s пространство 2-джетов, g_s – некоторая функция на этом пространстве, зависящая от параметра s, причем $g_0 = 1$, а функция

$$F_s = u_{11} - u_{00}u_{02} - f_s(u_{01})$$

соответствует поверхности $\mathcal{E}_s$, причем $F_0 = F$. Продифференцируем обе части уравнения (2) по параметру s при $s = 0$:

$$\left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0}\left(\Phi_s^{(2)}\right)^*(F) = \left.\frac{dg_s}{ds}\right|_{s=0} F_0 + \left.\frac{dF_s}{ds}\right|_{s=0}.$$

Замечая, что левая часть последнего уравнения является производной Ли функции F вдоль продолжения $X^{(2)}$ векторного поля X в пространство $J^2(\mathbb{R}^2)$ и что $\dfrac{dF_s}{ds} = -\dfrac{df_s(u_{01})}{ds}$, получаем:

$$\mathcal{L}_{X^{(2)}}(F) = \left.\frac{dg_t}{dt}\right|_{t=0} F - \left.\frac{df_s(u_{01})}{ds}\right|_{t=0}$$

Ограничим теперь последнее равенство поверхностью $\mathcal{E}$:

$$X^{(2)}(F)\big|_{\mathcal{E}} = h(u_{01}),$$

где обозначено

$$h(u_{01}) = -\left.\frac{df_s(u_{01})}{ds}\right|_{s=0}.$$

Данное уравнение представляет собой систему линейных уравнений в частных производных относительно функций A, B, C, решая которую, находим:

$$\begin{aligned}
A =& a_1 t + a_0,\\
B =& (b_{11}t + b_{10})x + z(t),\\
C =& (b_{11}t + b_{10} - a_1)u_{00} - b_{11}x - z'(t).
\end{aligned}$$

Здесь a_0, a_1, b_{11}, b_{10} – произвольные константы, а $z(t)$ – произвольная гладкая функция.

Таким образом, допустимые преобразования уравнений (1) образуют алгебру Ли, порожденную векторными полями

$$\begin{aligned}
Y_1 =& \frac{\partial}{\partial t},\\
Y_2 =& t\frac{\partial}{\partial t} - u_{00}\frac{\partial}{\partial u_{00}},\\
Y_3 =& tx\frac{\partial}{\partial x} + (tu_{00} - x)\frac{\partial}{\partial u_{00}},\\
Y_4 =& x\frac{\partial}{\partial x} + u_{00}\frac{\partial}{\partial u_{00}},\\
Y_5 =& z(t)\frac{\partial}{\partial x} - z'(t)\frac{\partial}{\partial u_{00}}.
\end{aligned}$$

Заметим, что Y_1, Y_2, Y_3, Y_4 образуют конечномерную часть этой алгебры Ли, а векторное поле Y_5 зависит от функции.

Преобразования сдвига вдоль этих векторных полей имеют вид

$$\begin{aligned}
\Phi_{1,s} =& (t, x, u_{00}) \mapsto (t + s, x, u_{00}),\\
\Phi_{2,s} =& (t, x, u_{00}) \mapsto (e^s t, x, e^{-s}u_{00}),\\
\Phi_{3,s} =& (t, x, u_{00}) \mapsto (t, e^{ts}x, (u_{00} - sx)e^{ts}),\\
\Phi_{4,s} =& (t, x, u_{00}) \mapsto (t, e^s x, e^s u_{00}),\\
\Phi_{5,s} =& (t, x, u_{00}) \mapsto (t, x + z(t)s, u_{00} - z'(t)s)
\end{aligned}$$

соответственно.

Продолжения этих преобразований в пространство 2-джетов действуют на функцию F следующим образом:

$$\begin{aligned}
(\Phi_{1,s}^{(2)})^*(F)) =& u_{11} - u_{00}u_{02} - f(u_{01}),\\
(\Phi_{2,s}^{(2)})^*(F) =& u_{11} - u_{00}u_{02} - f(e^{-s}u_{01})e^{2s},\\
(\Phi_{3,s}^{(2)})^*(F) =& u_{11} - u_{00}u_{02} - f(u_{01} - s),\\
(\Phi_{4,s}^{(2)})^*(F) =& u_{11} - u_{00}u_{02} - f(u_{01}),\\
(\Phi_{5,s}^{(2)})^*(F) =& u_{11} - u_{00}u_{02} - f(u_{01}).
\end{aligned}$$

Потоки, отвечающие векторным полям Y_1, Y_4, Y_5, не меняют вид уравнения Калоджеро и, следовательно, не меняют функцию f. Преобразование, отвечающее векторному полю Y_2, умножает аргумент функции f на e^{-s}, а саму функцию – на e^{2s}. Преобразование, отвечающее векторному полю Y_3, вычитает из аргумента функции f параметр s.

Таким образом, на функцию f нетривиально действуют преобразования, отвечающие векторным полям Y_2 и Y_3.

3. Дифференциальные инварианты допустимых преобразований

Пусть $J^k(\mathbb{R})$ – пространство k-джетов функций одной переменной с каноническими координатами $y, f_0, f_1, \dots, f_k$. Допустимые векторные поля Y_2 и Y_3 порождают векторные поля:

$$Z_1 = -y\frac{\partial}{\partial y} + 2f_0\frac{\partial}{\partial f_0}, \quad Z_2 = -\frac{\partial}{\partial y}$$

на пространстве 0-джетов. Найдем дифференциальные инварианты соответствующей группы Ли $\mathcal{G}$.

Напомним, что функция I, определенная в открытой области пространства $J^k(\mathbb{R})$ называется *дифференциальным инвариантом* порядка $\leqslant k$ группы Ли $\mathcal{G}$, если она сохраняется под действием k-ого продолжения этой группы, т.е. если $(\varphi^{(k)})^*(I) = I$ для любого элемента φ группы Ли $\mathcal{G}$.

Как известно, функция I является дифференциальным инвариантом группы Ли $\mathcal{G}$ тогда и только тогда, когда $X^{(k)}(I) = 0$ для любого векторного поля $X \in \mathfrak{g}$.

Легко заметить, что дифференциальных инвариантов нулевого порядка не существует. Найдем дифференциальный инвариант первого порядка. Решая систему

$$\begin{cases} Z_1^{(1)}(I) = 0, \\ Z_2^{(1)}(I) = 0, \end{cases}$$

получаем дифференциальный инвариант первого порядка

$$I_1 = \frac{f_1}{|f_0|^{3/2}}.$$

Перейдем к вычислению дифференциальных инвариантов более высоких порядков. Напомним понятие инвариантного дифференцирования, с помощью которого можно находить новые дифференциальные инварианты из уже известных.

Оператор ∇ на $J^\infty(\mathbb{R})$ называется *инвариантным дифференцированием* группы Ли $\mathcal{G}$, если он коммутирует с любым векторным полем $X^\infty \in \mathfrak{g}^\infty$, то есть $\nabla \circ X^\infty = X^\infty \circ \nabla$.

Можно показать, что инвариантное дифференцирование группы Ли $\mathcal{G}$ имеет вид:

$$\nabla = \frac{1}{\sqrt{|f_0|}}\frac{d}{dy}.$$

Используя инвариантное дифференцирование можно построить инварианты более высоких порядков:

$$I_2 = \nabla(I_1), \ldots, I_k = \nabla(I_{k-1}), \ldots$$

Например, дифференциальные инварианты второго и третьего порядков имеют вид вид:

$$I_2 = \frac{2f_2 f_0 - 3f_1^2}{2f_0^3},$$

$$I_3 = \frac{2f_3 f_0^2 - 10 f_1 f_2 f_0 + 9 f_1^3}{2f_0^{9/2}}.$$

Теорема 1. *Алгебра дифференциальных инвариантов допустимых преобразований уравнения Калоджеро* (1) *порождена базисным инвариантом* $I_1 = \dfrac{f_1}{f_0^{3/2}}$ *и инвариантным дифференцированием* $\nabla = \frac{1}{|f_0|}\frac{d}{dy}$.

Список литературы

1. Морозов О.И. Линеаризуемость и интегрируемость обобщенного уравнения Калоджеро-Хантера-Сакстона // МГТУ ГА. 2007. Т. 114, № 4. С. 34–41.
2. Golovin S.V. Group foliation of Euler equations in nonstationary rotationally symmetrical case // Proc. Inst. Math. NAS of Ukraine, 2004, Vol. 50, Part 1. P. 110–117.
3. Mukhina S. An Exact Solution of the Hunter-Saxton-Calogero Equation by Contact Linearization Method // Advances in Systems Science and Applications. 2023, Vol. 23, No. 04. P. 1–7.
4. Tod K.P. Einstein-Weil spaces and third order differential equations // J. Math. Phys. 2000. Vol. 41. P. 5572–5581.
5. Kushner A.G. A contact linearization problem for Monge-Ampère equations and Laplace invariants // Acta Appl. Math. 2008. Vol. 101. P. 177–189.
6. Contact geometry and nonlinear differential equations Cambridge / Ed. by Kushner A.G., Lychagin V.V., Rubtsov V.N. Cambridge University Press, 2007. 496 p.