УДК 517.958, 514.763.85

ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ЛАКСА И ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЭЙЛЕРА ДВИЖЕНИЯ НЕВЯЗКОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ НА СФЕРЕ

О.И. Морозов
Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН
Россия, 117997, Москва, Профсоюзная ул., 65
E-mail: oimorozov@gmail.com

Ключевые слова: уравввнения Эйлера, представление Лакса, закон сохранения.

Аннотация: Мы находим представления Лакса для уравнения Эйлера движения невязкой несжимаемой жидкости на сфере и доказываем, что параметр, входящий в одно из этих представлений, является неустранимым. Кроме того мы находим законы сохранения, соответствующие косимметриям, зависящим от джетов второго порядка.

1. Введение

Геофизические процессы, такие как атмосферные циркуляции и океанские течения, описываются нелинейными уравнениями гидродинамики, изучение которых позволяет лучше понимать природу климатических изменений, а также предсказывать разрушительные стихийные явления (ураганы, тайфуны, и т.д.). Уравнение Эйлера движения невязкой несжимаемой жидкости на вращающейся сфере представляет собой одну из основных моделей геофизической гидродинамики [3, 13] и является темой многочисленных исследований, см. например [15]. Среди публикаций, посвященных изучению свойств уравнения Эйлера в сферической геометрии, отметим статьи [2, 4], в которых методы группового анализа были использованы для нахождения его точных решений. С помощью указанной в статье [14] замены координат уравнение Эйлера движения невязкой несжимаемой жидкости на вращающейся сфере может быть приведено к виду

$$\Delta(u_t) = [u, \Delta(u)], \tag{1}$$

где $\Delta(a) = ((1-x^2)\,a_x)_x + (1-x^2)^{-1}\,a_{yy}$, $[a,b] = a_x b_y - a_y b_x$ для произвольных функций $a = a(t,x,y)$ и $b = b(t,x,y)$. В данной статье мы находим два представления Лакса для уравнения (1), одно из которых содержит неустранимый спектральный параметр, и доказываем тем самым интегрируемость этого уравнения. Эти представления Лакса обобщают результаты статей [9,10,12]. Кроме того мы находим все законы сохранения уравнения (1), соответствующие косимметриям порядка не более второго.

В данной статье находим два представления Лакса для уравнения (1), одно из которых содержит неустранимый спектральный параметр, и доказываем тем самым интегрируемость этого уравнения. Эти представления Лакса обобщают результаты статей [9, 10, 12]. Кроме того мы находим все законы сохранения уравнения (1), соответствующие косимметриям порядка не более второго.

2. Представления Лакса

Основные результаты статей [9, 10, 12] допускают следующее обобщение для уравнения (1):

Теорема 1. *Уравнения*

$$\begin{cases} q_t = [u, q] + \mathrm{E}(u), \\ [\Delta(u), q] = \lambda - \mathrm{E}(\Delta(u)) \end{cases} \tag{2}$$

и уравнения

$$\begin{cases} q_t = [u, q], \\ [\Delta(u), q] = 1, \end{cases} \tag{3}$$

где $\mathrm{E}(a) = 2\,a - x\,a_x - y\,a_y$ *и* $\lambda = \mathrm{const}$, *задают два представления Лакса для уравнения* (1). *Параметр* λ *в системе* (2) *является неустранимымы, то есть дифференциальные накрытия, определенные системой* (2) *с различными постоянными значениями* λ, *неэквивалентны.*

Доказательство теоремы 1. Непосредственные вычисления показывают, что системы (2) и (3) совместны тогда и только тогда, когда выполнено уравнение (1). Симметрия $W = t\,\partial_t - u\,\partial_u$ уравнения (1) не допускает подъема до симметрии системы (2). Продолжение диффеоморфизма $\exp(\varepsilon\,W)$ на расслоение $J^3(\pi)$ джетов третьего порядка сечений расслоения $\pi \colon \mathbb{R}^7 \to \mathbb{R}^3$, $\pi \colon (t, x, y, u, v, p, q) \mapsto (t, x, y)$, отображает систему (2) с $\lambda = 1$ на эту же систему с $\lambda = \mathrm{e}^{\varepsilon}$. В соответствии с [8, §§ 3.2, 3.6], ср. [5, 6, 11], системы (2) с различными постоянными значениями λ являются неэквивалентными.

3. Законы сохранения

Косимметрии уравнения (1) являются решениями уравнения

$$D_t(\widehat{\Delta}(\psi)) - \widehat{J}(u, \widehat{\Delta}(\psi)) - 4\,x\,D_t D_x(\psi) - \frac{2\,(2\,x\,u_y - (1 - x^2)\,u_{xy})}{1 - x^2}\,\widehat{\Delta}(\psi)$$

$$+ \frac{2\,(3\,x^2 - 1)}{1 - x^2}\,D_t(\psi) - 2\left(\Delta\,u - \frac{2\,u_{yy}}{1 - x^2}\right)\left(D_x D_y(\psi) - \frac{x}{1 - x^2}\,D_y(\psi)\right)$$

$$- \frac{4\,u_{xy}}{1 - x^2}\,D_y^2(\psi) - 4\,(x\,u_{xy} + u_y)\,D_x(\psi) - \frac{4\,((1 - x^2)\,u_{xy} - x\,u_y)}{1 - x^2}\,\psi = 0. \tag{4}$$

Это уравнение является сопряженным к линеаризации уравнения (1), см. [7, 8]. В уравнении (4) использованы обозначения $\widehat{\Delta}(\psi) = D_x^2(\psi) + D_y^2(\psi)$ и $\widehat{J}(u, \widehat{\Delta}(\psi)) = u_x D_y(\widehat{\Delta}(\psi)) - u_y\, D_x(\widehat{\Delta}(\psi))$. Непосредственные вычисления показывают, что пространство решений $\psi \in C^\infty(J^2(\pi))$ системы (4) бесконечномерно:

Теорема 2. *Решения $\psi \in C^\infty(J^2(\pi))$ уравнения (4) являются линейными комбинациями с постоянными коэффициентами косимметрий*

$$\psi_1 = \frac{x}{1-x^2}, \quad \psi_2 = \frac{u}{1-x^2}, \quad \psi_3 = \frac{\cos y}{\sqrt{1-x^2}}, \quad \psi_4 = \frac{\sin y}{\sqrt{1-x^2}},$$

и косимметрий

$$\psi_5 = \frac{A(t)}{1-x^2}, \quad \psi_6 = \frac{B(\Delta\, u)}{1-x^2},$$

где A и B суть произвольные гладкие функции своих аргументов.

Я выражаю мою искреннюю благодарность И.С. Красильщику за очень важные обсуждения. Вычисления были выполнены с использованием пакета Jets, [1].

Список литературы

1. Baran H., Marvan M. Jets. A software for differential calculus on jet spaces and diffieties. `http://jets.math.slu.cz/` (дата обращения 12.01.2024).
2. Bihlo A., Popovych R.O. Lie reduction and exact solutions of vorticity equation on rotating sphere // Physics Letters A. 2012. Vol. 376. P. 1179–1184.
3. Holton J.R. An Introduction to Dynamic Meteorology. New York: Academic Press, 2004.
4. Ibragimov N.H., Ibragimov R.N. Integration by quadratures of the nonlinear Euler equations modeling atmospheric flows in a thin rotating spherical shell // Physics Letters A. 2011. Vol 375. P. 3858–3865.
5. Igonin S., Kersten P., Krasil′shchik I. On symmetries and cohomological invariants of equations possessing flat representations // Differential Geometry and Applications. 2003. Vol. 19. P.319–342
6. Igonin, Krasil′shchik J. On one-parametric families of Bäcklund transformations // T. Morimoto, H. Sato, K. Yamaguchi (eds.), Lie Groups, Geometric Structures and Differential Equations – One Hundred Years After Sophus Lie. Advanced Studies in Pure Mathematics. Tokyo: Math. Soc. Japan, 2002, Vol. 37. P. 99–114, Math. Soc. Japan, Tokyo, 2002.
7. Krasil′shchik J., Verbovetsky A., Vitolo R. The Symbolic Computation of Integrability Structures for Partial Differential Equations. Berlin: Springer, 2017.
8. Krasil′shchik I.S., Vinogradov A.M. Nonlocal trends in the geometry of differential equations: symmetries, conservation laws, and Bäcklund transformations // Acta Applicandae Mathematicae. 1989. Vol. 15. P. 161–209.
9. Li Y.C. A Lax pair for the two dimensional Euler equation // Journal of Mathematical Physics. 2001. Vol. 42. P. 3552–3553.
10. Li Y.C., Shvidkoy R. Isospectral theory of Euler equations // Journal of Mathematical Analysis and Applications. 2004. Vol. 292. P. 311–315
11. Marvan M. On the horizontal gauge cohomology and nonremovability of the spectral parameter // Acta Applicandae Mathematicae. 2002. Vol. 72. P. 51–65
12. Morozov O.I. Extensions of the symmetry algebra and Lax representations for the two-dimensional Euler equation. `arxiv.org/abs/2304.12077` (дата обращения 12.01.2024).
13. Педлоски Дж. Геофизическая гидродинамика. М.: Мир, 1984.
14. Platzman G.W. The spectral form of the vorticity equation // Journal of Meteorology. 1960. Vol. 17, P. 635–644.
15. Zeitlin V. Geophysical Fluid Dynamics. Understanding (Almost) Everything with Rotating Shallow Water Models. Oxford: Oxford University Press, 2018.