УДК 62-50

SVD-ПЛАНИРОВАНИЕ ЭКСПЕРИМЕНТА КОНСТРУИРОВАНИЯ ЭЛЛИПСОИДНЫХ ПОКАЗАТЕЛЕЙ КАЧЕСТВА ПРОЦЕССОВ В ЛИНЕЙНЫХ МНОГОМЕРНЫХ СИСТЕМАХ

Р.О. Оморов
Институт машиноведения и автоматики НАН КР
Кыргызская Республика, 720055, Бишкек, Скрябина ул., 23
E-mail: romano_ip@list.ru

А. Акунова
Институт машиноведения и автоматики НАН КР
Кыргызская Республика, 720055, Бишкек, Скрябина ул., 23
E-mail: aakunova@mail.ru

Т.А. Акунов
Институт машиноведения и автоматики НАН КР
Кыргызская Республика, 720055, Бишкек, Скрябина ул., 23
E-mail: takunov@mail.ru

Ключевые слова: линейная многомерная система управления, эллипсоидный показатель качества, сингулярное разложение матрицы, планирование эксперимента.

Аннотация: Рассматривается задача определения условий проведения планирования эксперимента, при котором значение показателя качества процессов в линейной многомерной системе точно совпадает с эллипсоидным показателем качества, полученным с использованием аппарата эллипсоидного оценивания в форме мажорант и минорант. Аппарат позволяет решить задачу переноса основных показателей качества, разработанных в теории одномерных систем, на случай многомерных, обеспечивая наглядную их геометрическую интерпретируемость. Для решения поставленной задачи используются свойства компонентов сингулярного (SVD) разложения) матриц.

1. Введение. Постановка задачи

Многомерная система, как всякое техническое устройство, имеет две фазы существования: разработки и эксплуатации. На стыке этих фаз существует процедура предъявления разработанной системы заказчику в соответствие с некоторой программой испытаний и проверки ее по значениям основных показателей качества. Для многомерной системы предлагается использовать эллипсоидные показатели качества [1-4], которые не являются непосредственно измеряемыми стандартной аппаратурой, в связи с чем возникает необходимость организации планирования эксперимента, ставящей своей целью экспериментальное оценивание эллипсоидных показателей качества систем, имеющих наглядную геометрическую интерпретируемость.

2. Конструирование эллипсоидных показателей качества

Рассматривается линейная многомерная непрерывная система

(1) $\dot{x}(t) = Fx(t) + Gg(t);\ x(0) = x_0;\ y(t) = Cx(t);$

где ***x(t)*** – вектор состояния, ***y(t)*** – вектор выхода, $\varepsilon(t) = g(t) - y(t) -$ ошибка по выходу, $g(t)$ – экзогенное конечномерное воздействие, $x \in R^n;\ g, y \in R^m;\ F \in R^{n\times n}$, $G, C^T \in R^{n\times m}$, где $F,\ G, C$ – соответственно, матрицы состояния, входа и выхода системы (1).

Идеология эллипсоидного оценивания [1-4] основана на сведении проблемной задачи к линейному виду

(2) $\kappa(\tau) = \Pi(t)\chi(\tau), \forall\tau, \tau = t, k, \omega$

где $\kappa \in R^\rho$, $\chi \in R^\nu$; $\Pi \in R^{\rho\times\nu} -$ критериальная матрица, τ может принимать смысл непрерывного времени t в случае исследования непрерывных многомерных управляемых процессов и смысл дискретного времени k, выраженного в числе интервалов дискретности длительностью Δt так, что непрерывное время t и дискретное k связаны соотношением $t=(\Delta t)k$ в случае исследования дискретных многомерных управляемых процессов, ω – частота источника внешнего гармонического воздействия.

Матрица $\Pi(\tau)$ в (2) имеет в силу сингулярного разложения [5,6] представление

(3) $\Pi(\tau) = U(\tau)\Sigma(\tau)V^T(\tau)$

где $\Sigma(\tau)$ диагональная матрица, имеющая на главной диагонали сингулярные числа матрицы $\Pi(\tau)$, $U(\tau)$ – ортогональная $(\rho\times\rho)$ матрица, столбцы которой образуют левый сингулярный базис матрицы $\Pi(\tau)$, $V(\tau)$ – ортогональная $(\nu\times\nu)$ матрица, столбцы которой образуют правый сингулярный базис матрицы $\Pi(\tau)$. Если в (3) перейти к евклидовым векторным нормам, то становятся справедливыми оценочные неравенства

(4) $\alpha_m(\tau) \le \|\kappa(\tau)\|/\|\chi(\tau)\| \le \alpha_M(\tau), \forall\tau,$

где $\alpha_m(\tau), \alpha_M(\tau)$ – экстремальные элементы алгебраического спектра $\sigma_\alpha\{\Pi(\tau)\}$ сингулярных чисел матрицы $\Pi(\tau)$, используются для вычисления эллипсоидных показателей качества процессов в линейных многомерных системах.

В зависимости от постановки задачи могут быть получены эллипсоидные показатели качества процессов как переходных функций, так и в задачах слежения при конечномерных воздействиях. Конструкции получаемых для таких задач критериальных матриц приведены в [1-4].

В данной работе ограничимся рассмотрением эллипсоидных оценок переходных функций. В этом случае критериальные матрицы для вычисления эллипсоидных оценок переходных функций по состоянию *x(t)* и выходу *y(t)* имеют вид

(5) $\Pi_x(t) = F^{-1}\,(exp(Ft) - I)G;\ \Pi_y(t) = CF^{-1}\,(exp(Ft) - I)G\,.$

Получаемые при этом эллипсоидные миноранты и мажоранты переходных функций позволяют определить в форме миноранты и мажоранты оценки таких прямых показателей качества, как время переходного процесса и перерегулирование.

3. SVD-планирования эксперимента оценивания эллипсоидных оценок переходных функций

Матрица П применительно к показателям изучаемой характеристики процессов получает свою реализацию. При этом в силу свойств компонентов сингулярного разложения обнаруживается возможность проведения эксперимента, связанного с эллипсоидными показателями качества многомерных процессов и обладающего свойством минимизации объема эксперимента. В силу использования SVD-подхода, способ носит название *SVD-планирования эксперимента*.

В задаче планирования эксперимента матрица П имеет смысл матрицы плана [7], κ – вектора откликов, (функций цели, параметров оптимизации), χ – вектора факторов. При постановке эксперимента одной из внутренних задач проведения эксперимента является минимизация объема эксперимента, которая в традиционной постановке переводит задачу из полного факторного эксперимента (ПФЭ) в дробный факторный эксперимент [7]. Сингулярное разложение матрицы П обнаруживает возможность такого рода, если содержательная постановка задачи позволяет ограничиться мажорантой и минорантой вектора откликов κ. Если воспользоваться SVD-процедурой, то для матрицы плана П можно записать представление (3), которое, с учетом диагональной структуры матрицы $\Sigma(\tau)$, имеет столбцовую форму записи вида

(6) $$\alpha_i(\tau)U(\tau) = \Pi(\tau)V_i(\tau), \mathrm{i} = \overline{1,\nu}$$

где $\alpha_i(\tau)$ – i-й элемент алгебраического спектра сингулярных чисел матрицы $\Pi(\tau)$, $(\circ)_i -$ i-й столбец матрицы $(\circ)$, при этом векторная евклидова норма $\|(\circ)_i\| = 1$.

Если в алгебраическом спектре сингулярных чисел и геометрических спектрах $L\{U_M(\tau)\}$ и $L\{U_m(\tau)\}(\tau)$ и $V(\tau)$ левых и правых сингулярных базисов матрицы $\Pi(\tau)$ выделить тройки $\{U_M(\tau), \alpha_M(\tau), V_M(\tau)\}$ и $\{U_m(\tau), \alpha_m(\tau), V_m(\tau)\}$, где $\alpha_M(\tau), \alpha_m(\tau) -$ максимальное и минимальное сингулярные числа $\Pi(\tau)$ для $\forall t$ соответственно, $\{U_M(\tau), V_M(\tau)\}$ и $\{U_m(\tau), V_m(\tau)\}$ согласованные с ними элементы левого и правого сингулярных базисов, тогда сфера $\|\chi(\tau)\| = fix$ в силу (2) отображается в эллипсоид, максимальные и минимальные полуоси которого принадлежат линейным оболочкам $L\{U_M(\tau)\}$ и $L\{U_m(\tau)\}$, причем длины этих полуосей соответственно равны $\alpha_M(\tau)\|\chi(\tau)\|$ и $\alpha_m(\tau)\|\chi(\tau)\|$, векторы в R^ν, отображающиеся в $L\{U_M(\tau)\}$ и $L\{U_m(\tau)\}$, принадлежат линейным оболочкам $L\{V_M(\tau)\}$ и $L\{V_m(\tau)\}$ соответственно.

Соотношение (6) совпадает с исходной линейной задачей (2), причем пространство столбцов матрицы левого сингулярного базиса $U_M(\tau)$ соответствует пространству откликов κ, а пространство столбцов матрицы правого сингулярного базиса V соответствует пространству факторов χ. Знание пар $\{U_M(\tau), \alpha_M(\tau)\}$ и $\{U_m(\tau), \alpha_m(\tau)\}$ позволяет построить SVD-план проведения эксперимента, который ограничивается двумя ситуациями, задаваемыми согласованными с $\alpha_M(\tau)$, $\alpha_m(\tau)$-правыми векторами $V_M(\tau)$ и $V_m(\tau)$ в пространстве переменной $\kappa(\tau)$.

Таким образом, дадим следующее определение SVD-планирования эксперимента:

Определение. *Дробный факторный эксперимент (ДФЭ), состоящий в изучении подпространства левого и правого сингулярного базисов U и V в сингулярном разложении матрицы плана П будем называть SVD-планированием эксперимента (SVD-ПЭ).*

Тройки $\{U_M(\tau), \alpha_M(\tau), V_M(\tau)\}$ и $\{U_m(\tau), \alpha_m(\tau), V_m(\tau)\}$ в сочетании с представлением (2) в евклидовых векторных нормах задают соответственно точную верхнюю и нижнюю границы, на которых скалярные неравенства в (4) обращаются в равенства, что позволяет определить условия, при которых значение показателя качества точно совпадает с эллипсоидным показателем.

Проблемная ориентация задачи SVD-ПЭ проявляется в конкретной конструкции матрицы плана П. В зависимости от проблемной задачи можно выделить две постановки задачи SVD-ПЭ в задаче эллипсоидного оценивания

Первая постановка определяется тем, что вектор $\chi = \chi(\tau)$ в (2) параметризован параметром τ согласованно с вектором $\kappa(\tau)$. Тогда при проведении SVD-ПЭ для каждого значения параметра τ в пространстве переменной $\kappa(\tau)$ определяются векторы $V_M(\tau)$ и $V_m(\tau)$, решающие задачу планирования эксперимента.

Во второй постановке вектор χ имеет стационаризированную форму $\chi = \chi(0)$. Тогда при проведении SVD-ПЭ для каждого значения параметра τ в пространстве переменной $\kappa(\tau)$. определяются псевдостационарные векторы $V_M(\tau)$ и $V_m(\tau)$, порождающие максимальный и минимальный отклики.

Пример. Интерпретацию SVD-ПЭ можно привести на примере эллипсоидных оценок качества переходных процессов в фотоэлектрической следящей системе (ФЭСС) состоящей из двух двухканальных подсистем. Между подсистемами существует связь, так что ошибка первой ФЭСС является входом второй. Сепаратные каналы подсистем спроектированы так, что их матрицы состояния характеризуются распределением мод Баттерворта второго порядка с характеристическими частотами $\omega_{01} = 714\ c^{-1}$, $\omega_{02} = 714\ c^{-1}$, $\omega_{03} = 120\ c^{-1}$ и $\omega_{04} = 120\ c^{-1}$, доставляющим каналам длительности переходных процессов $t_{п1} = 0.063$ сек., $t_{п2} = 0.063$ сек., $t_{п3} = 0.0375$ сек., $t_{п4} = 0.0375$ сек. соответственно.

Модель (1) агрегированной системы характеризуется матрицами

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -509796 & -1009.7 & 0 & 0 & -509796 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -509796 & -1009.7 & 0 & 0 & -509796 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -14400 & -169.7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -14400 & -169.7 \end{bmatrix},$$

$$G = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 509796 & 0 & 509796 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 509796 & 0 & 509796 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 14400 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 14400 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

На рис. 1 а) приведены соответственно кривые эллипсоидных мажорант и минорант переходных функций в агрегированной системе.

Матрица плана имеет вид $\Pi_y(t)$в соотношении (5). Анализ показывает, что в пространстве факторов переменной $\chi = g(0)$ фиксированной нормы можно выделить две секторные области, приведенные в двумерном представлении на рис. 1 б), порождающие мажоранту в случае рис.1, в) и рис.1, г) – миноранту вектора откликов κ=y(t) переходных функций многомерной системы, представленных на рис.1 а). Значения $V_M(\tau)$,$V_m(\tau)$ и соответствующие им отклики $h_M(t)U_M(\tau)$ и $h_m(t)U_m(\tau)$ поэлементно представлены в графической форме на рис.1 в) и рис. 1 г). Временное сечение представленных кривых позволяет в пространстве факторов $\chi = g(0)$ отыскать векторы порождающие мажоранту и миноранту рис.1 а) вектора откликов κ=y(t) в данный момент времени t. На рис. 2 представлена поверхность откликов κ=y(t) для $\|g(0)\| = 1$ и отмечены положения векторов $h_M(t)U_M(\tau)$ и $h_m(t)U_m(\tau)$ через интервал времени $\Delta t = 0{,}0001$ сек., наглядно иллюстрирующая справедливость возможностей SVD-планирования эксперимента.

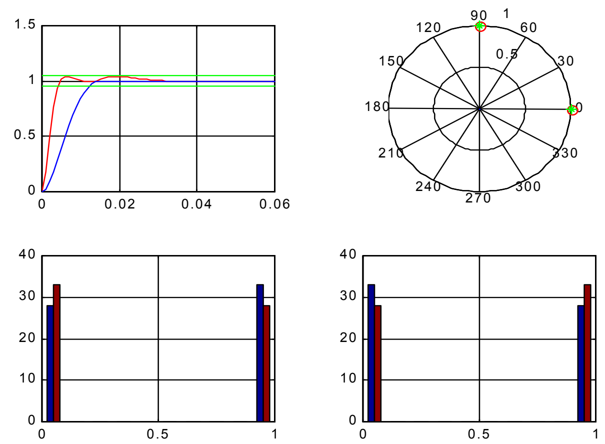

Рис. 1.

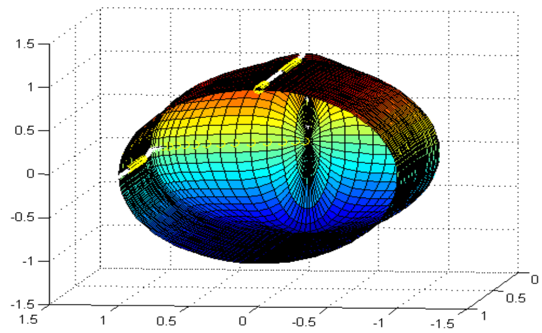

Рис. 2.

4. Заключение

Аппарат эллипсоидного оценивания в форме мажорант и минорант позволяет решить задачу переноса основных показателей качества, разработанных в теории одномерных систем, на случай многомерных, обеспечивая наглядную их геометрическую интерпретируемость.

Использование свойств компонентов сингулярного разложения позволило определить условия проведения SVD–планирования эксперимента, при которых значение показателя качества точно совпадает с эллипсоидным показателем.

Список литературы

1. Баев А.П., Оморов Р.О., Ушаков А.В. Оценки переходных функций линейных многомерных систем управления // Изв. Вузов. Электромеханика, 1989, №1. С. 90-96.
2. Акунов Т.А., Алишеров С., Оморов Р.О., Ушаков А.В. Модальные оценки качества процессов в линейных многомерных системах. Бишкек: Илим, 1991. 59 с.
3. Оморов Р.О., Акунов Т.А., Айдралиев А.О. Эллипсоидные оценки траекторной чувствительности многомерных процессов на основе обобщенной проблемы сингулярных чисел // Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики. 2022. Т. 22, № 2. С. 239-245.
4. Ушаков А.В., Акунова А., Оморов Р.О., Акунов Т.А. Робастные многомерные системы управления: Частотные и алгебраические методы / Под ред. Р.О. Оморова. Бишкек: Илим, 2022. 352 с.
5. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. М.: Наука, 1973. 575 с.
6. Голуб Дж., Ван Лоун Ч. Матричные вычисления / Пер. с англ. М.: Мир, 1999. 548 с.
7. Тарасов В.С. Методы планирования и моделирования объектов эксперимента. Л: ЛПИ, 1986. 88 с.