УДК 514.169, 514.7, 517.955

ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ ОТРИЦАТЕЛЬНО ИНТЕГРИРУЕМОГО ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

С.С. Мухина

Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН

Россия, 117997, Москва, Профсоюзная ул., 65

E-mail: ssmukhina@edu.hse.ru

Ключевые слова: пространство 1-джетов, распределение Картана, дифференциальная 2-форма, производная Ли, векторное поле.

Аннотация: В работе для нелинейного уравнения в частных производных второго порядка решена задача Коши. Для уравнения, описывающего глубокую фильтрацию суспензии в пористой среде, построено точное многозначное решение. Суть метода состоит в использовании свойств характеристических распределений, соответствующих исходному уравнению. Первая производная одного из распределений является вполне интегрируемой, а другая – нет. Кривая Коши выбирается так, чтобы она лежала на распределении Картана. Строится поверхность решения, путем продолжения найденной кривой.

1. Введение

Рассмотрим нелинейное гиперболическое уравнение в частных производных второго порядка

$$u_{q_1q_2} = h(u_{q_2})u_{q_1}, \tag{1}$$

где $u(q_1, q_2)$ – неизвестная функция, нижние индексы означают взятие частных производных по переменным q_1, q_2. Данное уравнение возникает в теории сплошных сред и описывает глубокую фильтрацию суспензии в пористом слое. Методами контактной линеаризации удалось построить решение уравнения (1) для случая линейной фунции h [1]. В этом случае обе вторых производных характеристических распределения являются вполне интегрируемыми и уравнение контактным преобразованием приводится к волновому, которое может быть проинтегрировано.

Данная работа посвящена решению задачи Коши уравнения (1) для произвольной функции h методами геометрии нелинейных дифференциальных уравнений.

2. Геометрия исходной задачи

Рассмотрим пространство 1-джетов $J^1\mathbb{R}^2$ с двумя независимыми переменными q_1, q_2, пусть q_1, q_2, u, p_1, p_2 – канонические координаты [2]. В этом пространстве задана форма Картана

$$\varkappa = du - p_1 dt - p_2 dx,$$

которая определяет контактную структуру на J^1 (так называемое распределение Картана)

$$\mathcal{C} : J^1 \ni a \mapsto \mathcal{C}(a) := \ker \varkappa_a \subset T_a J^1.$$

Двумерная поверхность в пространстве 1-джетов

$$\Gamma_u^1 = \left\{ u = u(q_1, q_2),\ p_1 = \frac{\partial u(q_1, q_2)}{\partial q_1},\ p_2 = \frac{\partial u(q_1, q_2)}{\partial q_2} \right\} \subset J^1\mathbb{R}^2$$

называется 1-графиком функциии $u(q_1, q_2)$. Исходному уравнению (1) в пространстве 1-джетов отвечает эффективная дифференциальная 2-форма

$$\omega = 2h(u_{q_2})u_{q_1} dq_1 \wedge dq_2 - dq_1 \wedge du_{q_1} + dq_2 \wedge du_{q_2}.$$

Ограничивая 2-форму ω на двумерную поверхность Γ_u^1 и приравнивая его в нулю

$$\omega|_{\Gamma_u^1} = 0,$$

получим уравнение (1). Следовательно, поверхность Γ_u^1 – решение уравнения (1). Введем симплектическую структуру $\Omega \in \Omega^2(\mathcal{C})$:

$$\Omega = d\varkappa|_{\mathcal{C}}$$

Определим линейный оператор $A_\omega\colon D(\mathcal{C}) \to D(\mathcal{C})$, который действует по следующему правилу:

$$A_\omega X \rfloor \Omega = X \rfloor \omega,$$

где $D(\mathcal{C})$ – модуль векторных полей продолженных на распределении Картана $\mathcal{C}$. Оператор A_ω имеет матричное представление

$$A_\omega = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2p_1 h(p_2) & -1 & 0 \\ -2p_1 h(p_2) & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

тут квадрат матрицы скалярен $\det A_\omega^2 = 1$, а собственные значение равны ± 1. Собственные подпространства оператора A_ω образуют два 2-мерных характеристических распределения:

$$C_- = \left\{ X_- = \frac{\partial}{\partial p_1}, Y_- = \frac{\partial}{\partial q_1} + p_1 \frac{\partial}{\partial u} + h(p_2) p_1 \frac{\partial}{\partial p_2} \right\}, \tag{2}$$

$$C_+ = \left\{ X_+ = \frac{\partial}{\partial p_2}, Y_+ = \frac{\partial}{\partial q_2} + p_2 \frac{\partial}{\partial u} + h(p_2) p_1 \frac{\partial}{\partial p_1} \right\}.$$

Векторные поля $X_\pm, Y_\pm$ образуют базис модуля $D(\mathcal{C}_\pm)$. Первые производные распределений из (2) имеют вид $C_\pm^{(1)} = Span(X_\pm, Y_\pm, [X_\pm, Y_\pm] | X_\pm, Y_\pm \in D(C_\pm))$. Коммутаторы векторных полей равны

$$[X_-, Y_-] = -\frac{\partial}{\partial u} - h(p_2)\frac{\partial}{\partial p_2},\ [X_+, Y_+] = -\frac{\partial}{\partial u} - h'(p_2)p_1\frac{\partial}{\partial p_1}.$$

Распределение $C_-^{(1)}$ вполне интегрируемо, а $C_+^{(1)}$ – нет. Мы можем говорить об $(-)$-интегрируемости дифференциальной 2-формы ω. Первые интегралы распределения $C_-^{(1)}$ имеют вид

$$H_1 = q_2,\ H_2 = u - \int \frac{dp_2}{h(p_2)}.$$

3. Решение задачи Коши

Пусть $\mathcal{K} \subset J^1\mathbb{R}^2$ – кривая Коши, тогда для любой точки $a \in \mathcal{K}$ будут выполняться условия

$$(3) \qquad T_a\mathcal{K} \not\subset C_\pm(a), \quad \varkappa|_L = 0 \xrightarrow{\mathcal{K}\subset L} \varkappa|_{\mathcal{K}} = 0,$$

тут L – многозначное решение задачи Коши уравнения (1) [3].

Зададим кривую Коши в параметрическом виде:

$$\mathcal{K} = \{q_1 = Q_1(s), q_2 = Q_2(s), u = U(s), p_1 = P_1(s), p_2 = P_2(s)\},$$

касательная к кривой в векторном виде

$$\vec{V}_{\mathcal{K}} = \{\dot{Q}_1(s), \dot{Q}_2(s), \dot{U}(s), \dot{P}_1(s), \dot{P}_2(s)\} =$$

$$= \dot{Q}_1\frac{\partial}{\partial q_1} + \dot{Q}_2\frac{\partial}{\partial q_2} + \dot{U}\frac{\partial}{\partial u} + \dot{P}_1\frac{\partial}{\partial p_1} + \dot{P}_2\frac{\partial}{\partial p_2}.$$

Выберем кривую Коши так, чтобы выполнялось первое условие (3). Для этого зададим распределение (2) в виде 1-формы

$$C_\pm^* = \langle -h(p_2)p_1dq_2 + dp_1, dq_1, -h(p_2)p_1dq_1 + dp_2, dq_2\rangle.$$

Значение дифференциальной 1-формы $C_\pm^*$ на векторном поле $\vec{V}_{\mathcal{K}}$ не должно равняться нулю $C_\pm^*(\vec{V}_{\mathcal{K}}) \neq 0$. В результате получим систему:

$$(4) \qquad \begin{cases} \dot{P}_1 - h(P_2)P_1\dot{Q}_2 \neq 0, \\ \dot{Q}_1 \neq 0, \\ \dot{P}_2 - h(P_2)P_1\dot{Q}_1 \neq 0 \\ \dot{Q}_2 \neq 0. \end{cases}$$

Пусть кривая Коши, удовлетворяющая условиям (4), имеет вид

$$\mathcal{K} = \{q_1 = s, q_2 = s, u = s^2, p_1 = s, p_2 = s\}$$

Первые интегралы распределений, ограниченные кривой Коши $H_1|_{\mathcal{K}}, H_2|_{\mathcal{K}}$ функционально независимы, поэтому можно найти гладкую функцию $F(x, y)$ такую, что $F(H_1|_{\mathcal{K}}, H_2|_{\mathcal{K}}) = 0$.
Выберем функцию $h(p_2) = \dfrac{1}{1+p_2}$, тогда

$$H_1|_{\mathcal{K}} = Q_2(s) = s,\ H_2|_{\mathcal{K}} = U(s) - \frac{(1+P_2(s))^2}{2} = \frac{s^2}{2} - s - \frac{1}{2}.$$

Находим функцию F такую, что $F(H_1|_{\mathcal{K}}, H_2|_{\mathcal{K}}) = 0$:

$$F(x, y) = x^2 - y - \frac{(1+x)^2}{2}$$

тогда

$$H = F(H_1, H_2) = q_2^2 + u - \frac{(1+p_2)^2}{2} - \frac{(1+q_2)^2}{2},$$

заметим, что $\mathcal{K} \subset L$, если $H = 0$, т.е. $L = \{a \in J^1 | H(a) = 0\}$. Одномерное распределение $l_+ = C_+ \cap TL$ порождено векторным полем

$$X = (1+p_2)\frac{\partial}{\partial q_2} + (1+p_2)p_2\frac{\partial}{\partial u} + p_1\frac{\partial}{\partial p_1} + (-q_2 + 1 + p_2)\frac{\partial}{\partial p_2}.$$

Продолжая кривую Коши вдоль траектории векторного поля X, получена поверхность решения исходного уравнения (1) в параметрическом виде.

$$\begin{cases} q_1 = s,\ q_2 = \dfrac{e^{\frac{t}{2}}\left(\sqrt{3}(s+2)\sin\left(\frac{\sqrt{3}t}{2}\right) + 3\cos\left(\frac{\sqrt{3}t}{2}\right)s\right)}{3}, \\ u = \dfrac{2\left(s^2 + s - \dfrac{1}{2}\right)e^t\cos^2\left(\frac{\sqrt{3}t}{2}\right)}{3} - \dfrac{\sqrt{3}(s+2)e^{\frac{t}{2}}\sin^2\left(\frac{\sqrt{3}t}{2}\right)}{3} + \\ + \dfrac{(2s^2+2s+5)e^t}{6} + \dfrac{\left(4\sqrt{3}e^t(s+\frac{1}{2})\sin\left(\frac{\sqrt{3}t}{2}\right) - 6e^{\frac{t}{2}}s\right)\cos\left(\frac{\sqrt{3}t}{2}\right)}{6} - \dfrac{1}{2}, \end{cases}$$

где t, s – параметры. Кривая Коши и график многозначного решения представлен на рисунке (1).

Данная работа была поддержана грантом Фонда развития теоретической физики и математики «БАЗИС» №23-7-5-52-1.

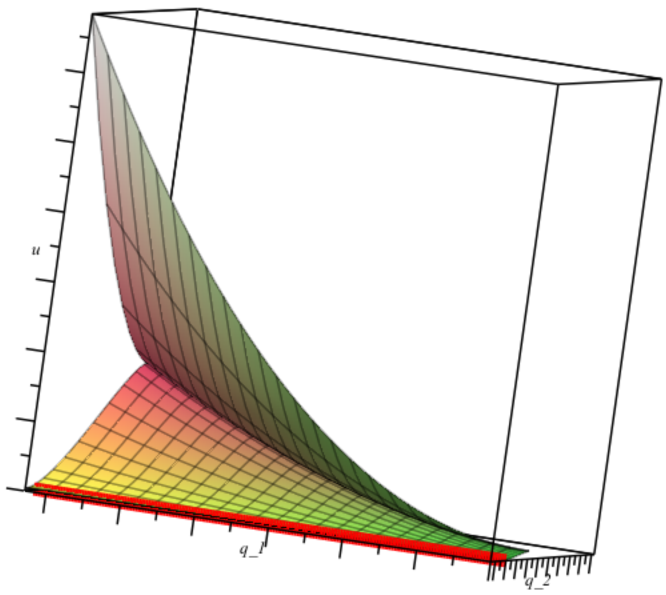

Рис. 1. Поверхность решения

Список литературы

1. Kushner A.G., Mukhina S.S. Integration of the deep bed filtration equations // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2022. Vol. 43, No. 10. P. 73–80.
2. Lychagin V.V. Contact geometry and nonlinear second-order didderential equations // Uspekhi Mat. Nauk. 1979. Vol. 34, No. 1. P. 137–165.
3. Kushner A.G., Lychagin V.V., Rubtsov V.N. Contact geometry and nonlinear differential equations. Encyclopedia of Mathematics and Its Applications. Cambridge: Cambridge University Press, 2007. 496 p.