

ФИЛЬТРАЦИОННЫЕ ПРОЦЕССЫ ДЛЯ ХИМИЧЕСКИ И ЭЛЕКТРИЧЕСКИ АКТИВНЫХ ЖИДКОСТЕЙ В ЭЛЕКТРОМАГНИТНОМ ПОЛЕ

Е.А. Рябушев

Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН

Россия, 117997, Москва, Профсоюзная ул., 65

E-mail: lispanhaskell@gmail.com

Ключевые слова: Геометрические методы, гладкие многообразия, термодинамика, управление распределенными системами.

Аннотация: Рассматриваются процессы фильтрации и гидродинамического течения химически активных электропроводящих жидкостей и газов в электромагнитном поле. Строится общая модель термодинамических и химических процессов, которые могут протекать в таких жидкостях, с учетом электромагнетизма. Предлагается замкнутое описание исследуемых жидкостей в терминах дифференциальных уравнений в частных производных, которое может использоваться в качестве модели объекта управления.

1. Введение

Примером химически активных токопроводящих сред являются растворы или расплавы электролитов, а также низкотемпературная не вполне ионизированная плазма. При течении или фильтрации таких сред в них могут протекать как химические, так и термодинамические процессы, которые могут влиять на движение такой среды. Например, в растворах электролитов такими процессами могут выступать реакции ионного обмена между различными компонентами раствора, а для плазмы – реакции ионизации и нейтрализации между ее ионным и нейтральным компонентами. Поэтому для полного описания таких сред, которое необходимо для постановки задач управления, необходимо использовать математическую модель среды, которая учитывает ее химическую и электрическую активность.

Данный доклад посвящен возможным способам описания термодинамики и кинетики химически активных токопроводящих сред с использованием геометрических методов. Предлагаемый подход основывается на применении контактных многообразий и дифференциальных симметрий, которые позволяют сформулировать задачу в наиболее общих и абстрактных терминах, приложимых к любой ситуации. В результате получается сформулировать общую модель, в которую можно встроить любые ранее известных эмперические методы описания таких сред и процессов в них.

2. Термодинамика экстенсивных и интенсивных величин

Термодинамика химически и электрически активного вещества определяется набором экстенсивных и интенсивных величин, которые совместно с внутренней энергией U , образуют фазовое пространство

$$\Phi = V \times V^* \times R = (S, V, D, B, m_1 \dots m_k, U, T, p, E, H, \gamma_1, \dots, \gamma_k),$$

снабженное контактной формой

$$(1) \quad \omega = dU - TdS + pdV - \sum_{i=1}^k \gamma_i dm_i - \int E \wedge dD + H \wedge dB.$$

Здесь T – температура, S – энтропия, p – давление, V – объем, γ_i – химический потенциал i -компонента среды, m_i – масса i -компонента, E и H – электрическая и магнитная напряженности, а D и B – индукции электрического и магнитного полей.

Сохранение энергии требует, чтобы форма ω исчезала на термодинамически допустимых состояниях вещества. Поэтому все допустимые состояния образуют подмногообразие $L : \omega|_L = 0$, на котором выполняется первое и второе начала термодинамики.

3. Масштабная инвариантность и переход к распределенной системе

Термодинамика сохраняется при преобразованиях масштаба по экстенсивным переменным. Вводя плотности энергии, энтропии и масс:

$$u = \frac{U}{V}, s = \frac{S}{V}, \rho_1 = \frac{m_1}{V}, \dots, \rho_k = \frac{m_k}{V}$$

и совершая преобразование подобия к бесконечно малому объему, получаем форму энергии для плотностей

$$(2) \quad \omega = du - Tds - \sum_{i=1}^k \gamma_i d\rho_i - E \wedge dD + H \wedge dB,$$

и дополнительное соотношение

$$(3) \quad h = u - Ts + p - \sum_{i=1}^k \gamma_i d\rho_i = 0,$$

которое выполняется на L .

Поэтому на факторизации \tilde{L} многообразия L по преобразованиям подобия по объему исчезает контактная фактор-форма

$$(4) \quad \tilde{\omega} = dp - sdT - \sum_{i=1}^k \rho_i d\gamma_i + E \wedge dD + H \wedge dB,$$

которая определена на факторизации $\tilde{\Phi}$ гиперповерхности $\mathcal{E} \subset \Phi : h = 0$, где выполняется равенство (3), по преобразованиям масштабного подобия. Таким образом, $\tilde{\Phi}$ есть фазовое фактор-пространство с основной контактной формой (4).

4. Термодинамические процессы

Под термодинамическим процессом мы будем понимать фазовый поток, который задается векторным полем X на Φ и фактор-полем \tilde{X} на $\tilde{\Phi}$, при условии, что поля X и \tilde{X} касаются многообразий допустимых состояний вещества L и \tilde{L} . Таким образом, термодинамические процессы задаются контактными полями, которые сохраняют нули форм ω и $\tilde{\omega}$ в пространствах \tilde{X} на $\tilde{\Phi}$, соответственно.

Напомним, что в пространстве с канонической формой

$$\omega = dz - \sum_{i=1}^n y_i dx_i,$$

произвольное контактное поле X можно задать по его производящей функции $f = \omega(X)$ [1]:

$$X = - \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial y_i} \frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} + y_i \frac{\partial f}{\partial z} \right) \frac{\partial}{\partial y_i} + \left(f - \sum_{i=1}^n y_i \frac{\partial f}{\partial y_i} \right) \frac{\partial}{\partial z}.$$

Поэтому поле \tilde{X} , задающее термодинамический процесс на фазовом фактор-пространстве $\tilde{\Phi}$, всегда представимо в виде

$$\begin{aligned} X = & - \frac{\partial f}{\partial S} \frac{\partial}{\partial T} - \sum_{i=1}^k \frac{\partial f}{\partial \rho_i} \frac{\partial}{\partial \gamma_i} + \frac{\partial f}{\partial D} \frac{\partial}{\partial E} + \frac{\partial f}{\partial B} \frac{\partial}{\partial H} + \left(\frac{\partial f}{\partial T} + S \frac{\partial f}{\partial p} \right) \frac{\partial}{\partial S} \\ & + \sum_{i=1}^k \left(\frac{\partial f}{\partial \gamma_i} + \gamma_i \frac{\partial f}{\partial p} \right) \frac{\partial}{\partial \rho_i} - \left(\frac{\partial f}{\partial D} + E \frac{\partial f}{\partial p} \right) \frac{\partial}{\partial E} - \left(\frac{\partial f}{\partial B} + H \frac{\partial f}{\partial p} \right) \frac{\partial}{\partial H} \\ & + \left(f - S \frac{\partial f}{\partial S} - \sum_{i=1}^k \frac{\partial f}{\partial \rho_i} + E \frac{\partial f}{\partial E} + H \frac{\partial f}{\partial H} \right) \frac{\partial}{\partial p}. \end{aligned}$$

Разные слагаемые в данном выражении показывают как расходуются различные виды материи и энергии в ходе термодинамического процесса. Поскольку данное выражение справедливо в общем виде, то на его основе можно построить замкнутую модель сплошной среды, в которой протекают различные тепловые, химические и электрические процессы.

5. Модель фильтрации химически и электрически активной сплошной среды

При фильтрации проводящей жидкости или газа через пористую среду скорость фильтрации v определяется законом Дарси [2]

$$(5) \quad \nabla p + \frac{\eta}{K} v = j \times B,$$

где η – вязкость, K – коэффициент проницаемости среды, а j – плотность тока, которую можно найти из закона Ома

$$(6) \quad j = \sigma \left(E + \frac{1}{c} v \times B \right),$$

где σ – проводимость среды, а c – скорость света.

Добавляя к закону Дарси уравнения сохранения массы

$$(7) \quad \operatorname{div}(\rho_i V) = \rho_i f_p + f_{\gamma_i},$$

где правые части берутся из выражения для термодинамического процесса f , описывающего происходящие в среде химические реакции, из предыдущей части нашего доклада, а также уравнение теплопроводности

$$(8) \quad f_s + V \nabla T = a \Delta T,$$

мы получаем систему уравнений, которая вкупе с уравнениями Максвелла для поля, описывает фильтрацию произвольной проводящей химически активной жидкости.

6. Заключение

Предлагаемый в настоящем докладе подход к термодинамическому описанию химических и электрохимических процессов в сплошных средах позволяет создать общую модель проводящих химически активных сред. Данную модель предполагается в дальнейшем использовать в качестве модели различных объектов управления, конкретная специфика которых будет определять выбор производящей функции f , описывающей протекание химических и электрических реакций в этих средах.

Предложенное термодинамическое описание таких сред позволяет исключить время из уравнений фильтрации этих сред, что должно упростить дальнейших анализ различных задач, связанных с ними.

Список литературы

1. Radoslaw A., Maria U. Nonlinear PDEs, Their Geometry, and Applications // Proceedings of the Wisla 18 Summer School, 2018. P. 47–49.
2. Басниев К.С., Кочина Н.И., Максимов М.В. Подземная гидромеханика. М.: Недра, 1993.